

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

6-10-2019

ΤΜΗΜΑ : Ο₄

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,-3)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

2. Αν $f : A \rightarrow B$ συνάρτηση 1 - 1 τότε $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in f(A)$.

Μονάδες 5

3. Η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = e^x - 1$ είναι η συνάρτηση $g(x) = 1 + \ln x$.

Μονάδες 5

4. Αν η f με $A_f = \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε η εξίσωση $f(x^2) = f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το 1 .

Μονάδες 5

5. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$ τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(g(x))$ είναι το $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g .

Μονάδες 5

3. Να βρείτε την μονοτονία της f .

Μονάδες 5

4. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

5. Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$.

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Μονάδες 10

4. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) = 3$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω οι συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

1. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 10

2. Να λύσετε την εξίσωση $g(f(x) + x^3 + x - 2) = g(4 \cdot x + f(x))$

Μονάδες 15

Καλή επιτυχία

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ημερομηνία: 6 / 10 / 2019

Τμήματα: Γ1, Γ2

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ και $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο σημείο x_0 , με $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{-\infty, +\infty\}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

β) Για κάθε συνάρτηση f που δεν είναι συνεχής σε σημείο x_0 , δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

γ) Για όλες τις συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει ότι η $f + g$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο x_0 .

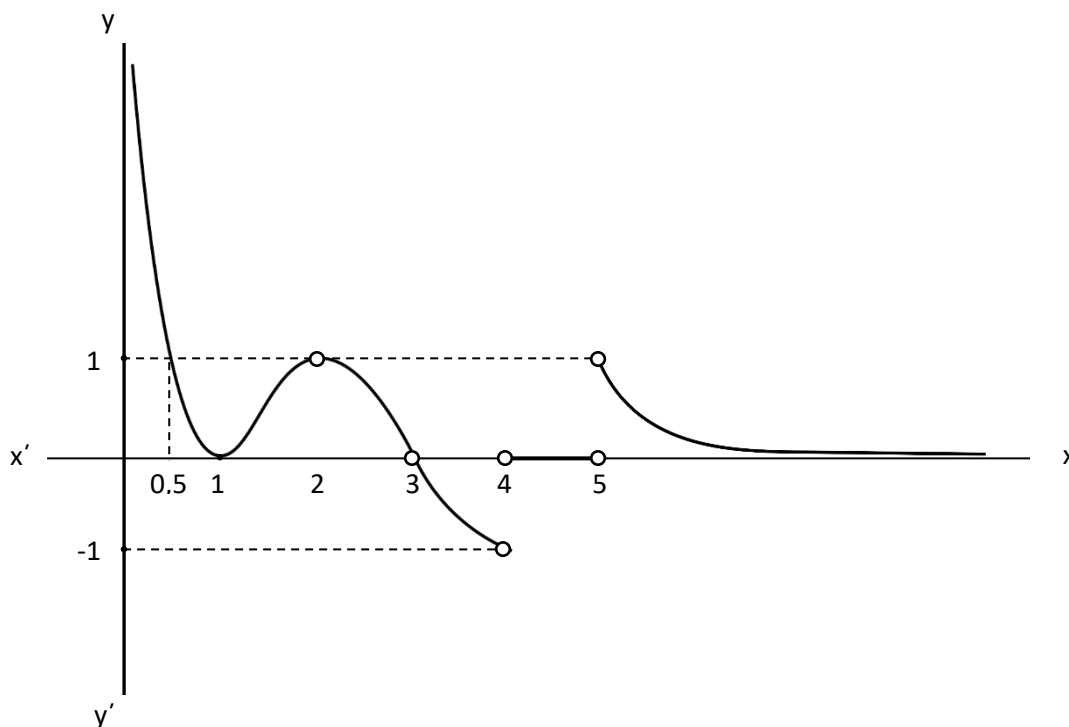
δ) Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

ε) Αν f ορισμένη σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα, τότε η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε συνάρτηση f με γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα .



- B1. α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- β)** Να γράψετε το σύνολο λύσεων των εξισώσεων $f(x)=0$ και $f(x)=1$.
- γ)** Να υπολογίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\frac{1}{2}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4+4+5

- B2.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια εφόσον υπάρχουν.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ **β)** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **γ)** $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ **δ)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Μονάδες 4

- B3.** Να βρείτε τα παρακάτω όρια εφόσον υπάρχουν και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)}$ **δ)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu\beta x}{x} + 5, & \text{αν } x < 0 \\ \gamma, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{\alpha(x+1)^2 + \beta}{\sqrt{x+1} - 1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ με $\beta \neq 0$

η οποία είναι συνεχής στο \mathbf{R} .

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = 4$
12

Μονάδες

Γ2. Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2019$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε πολυωνυμική συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2 + 3x$ και να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x^2} \right) \right).$$

Μονάδες 10

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$, έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$ και ακριβώς τρεις ρίζες στο \mathbf{R} .

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f(x)} + \alpha x + \beta \right) = \frac{1}{2}$

Μονάδες 7

Να έχετε επιτυχία!