ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 / 1 / 2020 **ΤΜΗΜΑΤΑ: $Γ_1$, $Γ_2$, $Ο_1$**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)=0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

Μονάδες 5

Α2. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Rolle..

Μονάδες 5

Α3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

« Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. »

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**. **Μονάδες 2**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

Μονάδες 2

β) Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση f ισχύει ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'.

Μονάδες 2

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=f(x)$, για κάθε $x \neq 0$, τότε ισχύει ότι $f(x)=c\cdot e^x$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 2

δ) Κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (α,β) με $\gamma \in (\alpha,\beta)$, για την οποία ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha,\gamma)\cup(\gamma,\beta)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 2

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$, υπάρχει εφαπτομένη της C_f με εξίσωση $y-f(x_0)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_0)$ όπου $x_0 \in \Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x-\ln\left(e^x-x\right)$.

Β1. Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

Μονάδες 10

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$.

Μονάδες 7

Β3. Έστω σημείο $M\left(x(t),y(t)\right)$, $t > 0$, το οποίο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f, έτσι ώστε η τετμημένη του να έχει σταθερή ταχύτητα $\upsilon > 0$. Να βρείτε την θέση του Μ την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η ταχύτητα της τεταγμένης του είναι ίση με την ταχύτητα της τετμημένης του.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύουν $f'(\alpha)=0$, $f(x)\le \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ καθώς και την συνάρτηση g με

$$g(x)=\begin{cases} 0 & ,\ \text{αν } x=\alpha \\ \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} & ,\ \text{αν } \alpha< x\le \beta \end{cases}$$. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. Ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ και ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 6

Γ2. Υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1>x_2$ και $f'(x_1)=f''(x_2)=0$.

Μονάδες 6

Γ3. Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $g'(\xi)+g(\xi)=0$.

Μονάδες 6

Γ4. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $M(x_0,f(x_0))$, με $x_0\in(\alpha,\beta)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ με $f(x)>0$ και $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)\ge e$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - \ln x = \ln\lambda$, όπου $e < \lambda < \frac{e^2}{2}$, έχει δυο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) > e(x+1)$.

Μονάδες 7

Να έχετε επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Τμήματα: Γ3 . Ο2

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Α: Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. (Μον. 10)

Β: Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. (Μον. 5)

Γ: Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1) Αν μία συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.
2) Το μέγιστο κέρδος ή η μέγιστη ζημιά πραγματοποιείται σε εκείνο το μέγεθος της παραγωγής στο οποίο η οριακή είσπραξη ισούται με το οριακό κόστος
3) Αν η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ τότε η C_f δεν έχει ακρότατο στο διάστημα αυτό.
4) Αν το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f τότε $f''(x_0) = 0$
5) Αν η μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε δεν είναι συνεχής στο x_o. (Μον. 10)

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Α: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

1) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μον. 4)
2) Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μον. 4)
3) Να δείξετε ότι $e^{2x} \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μον. 4)

Β: Μία παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση έχει την ιδιότητα: $f^3(x) + 3f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μον. 4)
2) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty]$ (Μον. 4)
3) Να δείξετε ότι $xf'(x) < f(x) < x$ για κάθε $x > 0$ (Μον.5)

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=f(0)=0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

1) Να δείξετε ότι: $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μον. 5)
2) Να δείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$ (Μον. 10)
3) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μον. 5)
4) Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη η οποία ικανοποιεί την σχέση:

   $g^3(x)+e^{g(x)}=e^x-\frac{x^2}{2}-2020$, $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. (Μον. 5)

ΘΕΜΑ 4

Α: Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $f(1)=3, g(0)=1, f'(3)=2, g'(0)\neq 0$ και $f\left(g(x)\right)\leq x^4+4x^2+3, x\in\mathbb{R}$.

1) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο της Μ(1,3) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. (Μον. 7).
2) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=1$ (Μον. 5).

Β: Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f. (Μον. 6)

Γ: Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+x-2$ με $\alpha,\beta\neq 0$. Αν η f έχει τρία διαφορετικά τοπικά ακρότατα να δείξετε ότι: $3\beta^2>8\alpha\gamma$ (Μον. 7)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 26-1-2020

ΤΜΗΜΑ : O_4

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{O}

Α . Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 10

Β . Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 5

Γ . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} .$$

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o .

Μονάδες 2

3. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο x_o ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) - f(x_o) \cdot g'(x_o) .$$

Μονάδες 2

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

Μονάδες 2

5. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) > 0$.

Μονάδες 2

Δ . Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

1. $f(x) = 2 \cdot x^5 - 3 \cdot x^4 + 5 \cdot x^2 - 6$

Μονάδες 1

2. $f(x) = 2 \cdot \eta\mu x + 5 \cdot \ln x - 3 \cdot \varepsilon\varphi x$

Μονάδες 1

3. $f(x) = \dfrac{e^x - 2 \cdot x}{\eta\mu x}$

Μονάδες 1

4. $f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x + e^x \cdot (3 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1)$

Μονάδες 1

5. $f(x) = \sqrt{\eta\mu(2 \cdot x^4)}$

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 4\cdot x^2-\alpha^2\cdot x \ , & αν \quad x\le 1 \\ 7\cdot x-\alpha-3 \ , & αν \quad x>1 \end{cases}$

Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι :

1. συνεχής στο 1 .

Μονάδες 10

2. παραγωγίσιμη στο 1

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Να μελετήσετε την μονοτονία της f .

Μονάδες 6

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 4

4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3\cdot f(x)\cdot ημ\dfrac{1}{x})$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^{o}

Α. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και ισχύουν $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $(0,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα x'x .

Μονάδες 5

2. Η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Μονάδες 10

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=4\cdot x^3-2\cdot\kappa\cdot x+\kappa-1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Μονάδες 5

2. Η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(x_o,2)$.

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία