

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1-12-2019

ΤΜΗΜΑ : Ο₄

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών .

Μονάδες 10

B. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[M, m]$ με $m = f(\alpha)$ και $M = f(\beta)$.

Μονάδες 2

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

Μονάδες 2

5. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-5 & ,\text{αν } x > 2 \\ x^2-3 & ,\text{αν } x \leq 2 \end{cases}$ είναι συνεχής

στο σημείο $x_0 = 2$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Να υπολογιστούν τα όρια (αν υπάρχουν) :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 - x + 5})$

Μονάδες 5

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

Μονάδες 5

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$

Μονάδες 5

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-3| + 5|1-x| - 10}{x^2 - 9}$$

Μονάδες 5

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi \cdot x), & x \leq 1 \\ \alpha \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot \beta, & 1 < x \leq 2 \\ \ln(x-1) + \eta\mu(\pi \cdot x) + \beta - 1, & x > 2 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε η f να είναι συνεχής .

Μονάδες 15

2. Για $\alpha = \beta = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο

ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει $f(0) = e^{-1}$, $f(1) = 5$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 10

B. Οι συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, έχουν σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $2 \cdot f(\xi) = g(f(\xi)) + g(\xi)$.

Μονάδες 15

Καλή επιτυχία

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

1 / 12 / 2019

Τμήμα : Γ₁ , Ο₁

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f , με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

A2. Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A .

Μονάδες 5

A3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

« Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 . »

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**.

Μονάδες 2

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

β) Αν η ευθεία $y = 3x - 2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , στο

σημείο $A(1, f(1))$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 3$.

Μονάδες 2

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 , τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .

Μονάδες 2

δ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g που είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε) Αν μια άρτια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση f' είναι περιττή.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - \alpha x, & \text{αν } x \leq 1 \\ \beta x^2 + 4x - 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$ και να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 8

B2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+2x) - f(1-x)}{x}$

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 2x$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $\Delta = [0, 2]$ με $0 < f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 2]$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sin x}{\eta\mu 2x + x} = -1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Μονάδες 4+6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + f(x) = x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

Μονάδες 8

Γ3. Αν για την συνάρτηση f ισχύει επιπλέον η σχέση $f(x) + 2x = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in [0, 2]$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x^3 + 4x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα xx' σε μοναδικό σημείο ρ και δεν δέχεται σε κανένα σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 4+4

Δ2. Για το σημείο ρ του ερωτήματος **Δ1**, ισχύει $f'(\rho) = 3\rho^2 + 4$ και ότι η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = x + 1$.

Μονάδες 4+5

Δ3. Αν η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος **Δ2** εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = -x^2 + \lambda x$, σε κάποιο σημείο $B(x_0, g(x_0))$, τότε να βρείτε το σημείο B και τον πραγματικό αριθμό λ .

Μονάδες 8

Να έχετε επιτυχία!