

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 9 / 2 / 2019

ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ₁ , Γ₂ , Γ₄ , Ο₁

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 5

A2. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής.

Μονάδες 5

A3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

« Αν για μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 . »

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**. **Μονάδες 2**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 3**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

Μονάδες 2

β) Αν σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και απομακρύνεται από τον xx' με σταθερή ταχύτητα $v = 2 \frac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}$, τότε ισχύει $x'(t) = 2$ για κάθε $t > 0$.

Μονάδες 2

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \neq 0$, τότε ισχύει ότι $f(x) = c \cdot e^x$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 2

δ) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$.

Μονάδες 2

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, τότε το σημείο $(0, f(0))$ είναι πάντοτε σημείο καμπής.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot e^{-x} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 12

B3. Να βρείτε τον αριθμό λ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \lambda \cdot x - e^x + 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ και $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$

για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι f είναι κυρτή και $f(x) \geq e$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - \ln x = \ln \lambda$, όπου $e < \lambda < \frac{e^2}{2}$, έχει δυο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - e}{x - 1}$, όπου $x > 1$ είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,3]$ με σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,4]$ και $f(1) = 1$, $f(3) = 3$. Να δείξετε ότι:

Δ1. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη προς την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 6

Δ2. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ για τα οποία ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.

Μονάδες 6

Δ4. Υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 7

Να έχετε επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

9-2-2019

ΤΜΗΜΑ: Γ₇

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν οι συναρτήσεις f και g

- είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία σταθερά c τέτοια ώστε

$$f(x) = g(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 10

B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδες 2

3. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι
γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . **Μονάδες 2**

4. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε κρίσιμα σημεία της f είναι
μόνο τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.
Μονάδες 2

5. Ισχύει $(7^x)' = x \cdot 7^{x-1}$.
Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot \ln x$.

1. Να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
Μονάδες 6

2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία
καμψής αν υπάρχουν.
Μονάδες 6

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν υπάρχουν.
Μονάδες 7

4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Αν ισχύει $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$, να δείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 7

B. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Αν η f στρέφεται κοίλα κάτω στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0,1]$.

Μονάδες 4

3. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Μονάδες 4

4. Αν $\gamma \in (0,1)$ να δείξετε ότι $f(x) \leq f'(\gamma) \cdot (x - \gamma) + f(\gamma)$, για κάθε $x \in (0,1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε για

κάθε $x > 0$ ισχύουν $x \cdot f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1) = 0$.

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ ως προς την μονοτονία και να εξετάσετε αν είναι 1 – 1 .

Μονάδες 5

2. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

Μονάδες 6

4. Να εξεταστεί η $h(x)$ ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι για

κάθε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2 \cdot e^5}$

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία