ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

8 / 12 / 2018

Τμήματα : Γ_1 , Γ_2 , Γ_4 , O_1

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$.

Μονάδες 5

Α2. Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α.

Μονάδες 5

Α3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

« Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. »

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**. **Μονάδες 2**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 3**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα (α,β), τότε δεν μπορεί να παρουσιάζει ολικά ακρότατα στο (α,β).

Μονάδες 2

β) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,2]$ με $f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in[0,2]$ και ισχύει $f(0)=-1$ και $f(2)=3$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Μονάδες 2

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

δ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε) Αν μια περιττή συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f' είναι άρτια.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^3-\alpha x, & \text{αν } x \le 1 \\ \beta x^2+4x-3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, με $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+2x)-f(1-x)}{x}$

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 2x$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ με σύνολο τιμών το $[\gamma,\delta]$, όπου $\alpha,\gamma>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f^2(x_0)=f(\alpha)\cdot f(\beta)$

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)-f(x)}{x-\alpha}=\dfrac{f(\alpha+\beta-x)}{\beta-x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1\in(\alpha,\beta)$.

Μονάδες 9

Γ3. Αν για την συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(x)+2x=\dfrac{1}{f(x)}$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει η σχέση $f^3(x)+f(x)=x^3-4x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,2)$ και ακριβώς τρείς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση $x+y-1=0$.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $g(x)=e^x+\ln|x|-e$, τότε να δείξετε ότι η σύνθεση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f\circ g$ στο $x = 1$.

Μονάδες 7

Να έχετε επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ **8-12-2018**

ΤΜΗΜΑ : $Γ_7$

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$

Α . Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 10

Β . Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle .

Μονάδες 5

Γ . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o .

Μονάδες 2

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και υπάρχει $x_0 \in \left(\alpha,\beta\right)$ με $f\left(x_0\right)=0$, τότε $f\left(\alpha\right)\cdot f\left(\beta\right)<0$.

Μονάδες 2

4. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta=\left[\alpha,\beta\right]$,τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[m,M\right]$ με m=$f\left(\alpha\right)$ και M=$f\left(\beta\right)$.

Μονάδες 2

5. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της .

Μονάδες 2

Δ . Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

1. $f\left(x\right)=2\cdot x^5-3\cdot x^4+5\cdot x^2-6$

Μονάδες 1

2. $f\left(x\right)=2\cdot \eta\mu x+5\cdot \ln x-3\cdot \varepsilon\varphi x$

Μονάδες 1

3. $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-2\cdot x}{\eta\mu x}$

Μονάδες 1

4. $f\left(x\right)=x\cdot \sigma\upsilon\nu x+e^x\cdot\left(3\cdot x^2-7\cdot x+1\right)$

Μονάδες 1

5. $f\left(x\right)=\sqrt{\eta\mu\left(2\cdot x^4\right)}$

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^{O}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 4\cdot x^2-\alpha^2\cdot x \ , & \text{αν} \quad x\leq 1 \\ 7\cdot x-\alpha-3 \ , & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}$

Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι :

1. συνεχής στο 1 .

Μονάδες 10

2. παραγωγίσιμη στο 1

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3^{O}

Έστω η συνάρτηση $f \ :[0\ ,\ 1]\to \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει $f(0)=e^{-1}$, $f(1)=5$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 20

ΘΕΜΑ 4^{O}

Α. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και ισχύουν $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $(0,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα x'x .

Μονάδες5

2. Η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Μονάδες 10

B. Έστω η συνάρτηση $f(x)=4\cdot x^3-2\cdot \kappa\cdot x+\kappa-1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Μονάδες 5

2. Η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(x_o,2)$.

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία