ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Σάββατο 6 – 4 – 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 3+4

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης 1-1.

Μονάδες 3

Α3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

« Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή και δυο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ, τότε ισχύει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ.»

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**.

Μονάδες 2

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις συναρτήσεις f, g ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$, τότε $D_{gof} \subseteq D_f$.

Μονάδες 2

β) Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g κοντά στο σημείο x_0.

Μονάδες 2

γ) Για κάθε ζεύγος παραγωγισίμων συναρτήσεων f, g για τις οποίες ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, τότε $f'(x) \neq g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Μονάδες 2

δ) Αν μια ευθεία (ε) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, τότε η ευθεία και η γραφική παράσταση δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Μονάδες 2

ε) Αν f, g συνεχείς σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$, τότε υπάρχει διάστημα $\Delta \subseteq [\alpha,\beta]$, ώστε να ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 6

Β4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & \alpha\nu\ x \in [-\pi,0)\cup(0,\pi] \\ \lambda, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Μονάδες 4

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{\eta\mu x} - x^x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$.

Μονάδες 8

Γ4. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, τον άξονα xx΄και των ευθειών $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, τότε ισχύει ότι $\frac{3\sqrt{3}}{4} < E < \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = f(x) + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$
- $x \cdot f'(0) \le e^x - 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Μονάδες 3+4

Δ2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Μονάδες 2+4

Δ3. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) > x > f^{-1}(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - f^{-1}(x)\right)$.

Μονάδες 4+4

Δ4. Αν $x > 1$ τότε να δείξετε ότι ισχύει $f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) > (x+1) \cdot f(1)$.

Μονάδες 4

Να έχετε επιτυχία!