

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

7-10-2017

ΤΜΗΜΑ : Γ₄ ,Ο₄, ΠΕΤΡΑΚΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 5

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε θα ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

Μονάδες 5

3. Αν για κάθε $x \in (\sqrt{5}, 3)$ ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lambda , \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lambda .$$

Μονάδες 5

4. Αν $f(x) = 2 - e^{-x}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Μονάδες 5

5. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-5 & , \text{αν } x > 2 \\ x^2-3 & , \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$ είναι συνεχής

στο σημείο $x_0 = 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Α . Να υπολογιστούν τα όρια (αν υπάρχουν) :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 - x + 5})$

Μονάδες 5

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

Μονάδες 5

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$

Μονάδες 5

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-3| + 5|1-x| - 10}{x^2 - 9}$

Μονάδες 5

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$f^3(x) + f(x) \cdot \eta\mu^2 x = 2 \cdot x^2 \cdot \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{να βρεθεί το } k .$$

Μονάδες 20

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi \cdot x), & x \leq 1 \\ \alpha \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot \beta, & 1 < x \leq 2 \\ \ln(x-1) + \eta\mu(\pi \cdot x) + \beta - 1, & x > 2 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε το όριο της f να υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 15

B. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει

$$x \cdot f(x) = x + \alpha - \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

1. Να δειχθεί ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

2. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Μονάδες 10

Καλή επιτυχία

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ₁, Γ₂, Γ₀₂
7/10/2017

ΘΕΜΑ 1^ο

Να συμπληρώσετε με σωστό «Σ» ή λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

- i.** Αν για τις f, g ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- ii.** Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο σημείο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- iii.** Ισχύει η πρόταση: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.
- iv.** Ισχύει η πρόταση: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε και μόνο τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- v.** Αν $f(x) \geq g(x)$ κοντά στο σημείο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

- i.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$ **ii.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x^2 - 4x + 4}$
- iii.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x - 1}$ **iv.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|-2x^3 + x^2 - 1| - \eta\mu x}{|x^3 - 2x| + 2017}$
- v.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^{2x} - 3^x + 1} - e^x \right)$ **vi.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\sqrt{x^2 + 1} + 2x \right) \cdot \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right) \right)$

(Μονάδες 18)

- B.** Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} ((\sqrt{x+1} - 1)g(x)) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu 2x} \right) = 2$, τότε να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 3°

- i.** Αν για την f ισχύει: $|xf(x) - \eta\mu^2 x| + (g(x) - 1)^4 \leq x^4, x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{xg(x) + x^2} = 1$$

(Μονάδες 12)

- ii.** Αν $h(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta, & \text{αν } x > 1 \\ \sqrt{x} - 1, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$, τότε να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, αν

γνωρίζετε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4°

- i.** Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax - \beta + 1}{x^2 - 4x + 4}$ για κάθε τιμή των παραμέτρων a, β .

(Μονάδες 10)

- ii.** Αν f συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 1$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, τότε:

- α)** Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}$. (Μονάδες 08)

- β)** Αν δίνεται επιπλέον ότι η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, να βρεθεί ο τύπος της. (Μονάδες 07)

Να έχετε επιτυχία!