

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδειχθεί ότι:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

A2. Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται κοίλη σε διάστημα Δ ;

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} , τότε πάντοτε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

β) Για κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, όπου $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

Μονάδες 2

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα $[a, \beta]$ και δεν παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, τότε δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$.

Μονάδες 2

δ) Για όλες τις συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Μονάδες 2

ε) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+x^2} dx < 0$, τότε $\alpha < \beta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη προς την ευθεία $y = -x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = xf'(x) - x$ και $f(x) \leq f(1) + x^2 - x$, για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ x \ln x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$ έχει με την γραφική παράσταση της f ακριβώς δυο κοινά σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ με $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ και $B(1, 0)$.

Μονάδες 8

Γ4. Για τον αριθμό α του ερωτήματος **Γ3**, να δείξετε ότι ισχύει $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < \alpha^{\alpha} < 1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1-2f(x)}{f^2(x)} = x^4 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν $g(x) = 2xf(x)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ της γραφικής παράστασης της g , τον άξονα xx' και των ευθειών $x = -1$ και $x = 1$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι αν F είναι αρχική της f τότε για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $F(x+4) + 3 \cdot F(x) < 4 \cdot F(x+1)$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα xx' , του άξονα yy' και της ευθείας $x = 2$, τότε ισχύει ότι: $f(1) + f(2) < E < f(0) + f(1)$.

Μονάδες 6

Να έχετε επιτυχία!