

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

10-2-2018

ΤΜΗΜΑ: Γ₄, Ο₄, ΠΕΤΡΑΚΗΣ,
ΓΟΥΝΑΡΑΣ & ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν οι συναρτήσεις f και g

- είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία σταθερά c τέτοια ώστε

$$f(x) = g(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 7

B. Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης .

Μονάδες 3

Γ. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 5

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδες 2

3. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι
γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

4. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε κρίσιμα σημεία της f είναι
μόνο τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.

Μονάδες 2

5. Ισχύει $(7^x)' = x \cdot 7^{x-1}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot \ln x$.

1. Να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 3

2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία
καμψής αν υπάρχουν.

Μονάδες 2

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν υπάρχουν.

Μονάδες 2

4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 3

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + 2 \cdot \ln x$.

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Μονάδες 2

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 4

3. Αν $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x + 2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$g(x) \geq g(x_0) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 4

4. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει η σχέση

$$f(x - 2) < 2 \cdot f(x + 1) - f(x + 4).$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

- A.** Αν ισχύει $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$, να δείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 7

- B.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Αν η f στρέφεται κοίλα κάτω στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0,1]$.

Μονάδες 4

3. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Μονάδες 4

4. Αν $\gamma \in (0,1)$ να δείξετε ότι : $f(x) \leq f'(\gamma) \cdot (x - \gamma) + f(\gamma)$, για
κάθε $x \in (0,1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε για

κάθε $x > 0$ ισχύουν $x \cdot f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1) = 0$.

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ ως προς την
μονοτονία και να εξετάσετε αν είναι 1 – 1 .

Μονάδες 5

2. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την
μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

Μονάδες 6

4. Να εξεταστεί η $h(x)$ ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι για

κάθε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2 \cdot e^5}$

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 10-2-2018

ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ₁, Γ₂, Ο₂

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 10

A2. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

Μονάδες 2

β) Το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης f είναι πάντα ολικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 2

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbf{R}^* και ισχύει $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$, τότε ισχύει ότι $f(x) = c \cdot e^x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$.

Μονάδες 2

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbf{R} με f κυρτή, g κοίλη και η ευθεία $y = x$ είναι κοινή εφαπτομένη τους, τότε η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Μονάδες 2

ε) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού, έχει πάντα ένα σημείο καμψής.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x - x)$.

B1. Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbf{R} και να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε τον αριθμό λ αν για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει $f(x)^3 \leq \lambda x - e^x + 1$.

Μονάδες 7

B3. Έστω σημείο $M(x(t), y(t))$, $t > 0$, το οποίο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f , έτσι ώστε η τετμημένη του να έχει σταθερή ταχύτητα $v > 0$. Να βρείτε την θέση του M την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η ταχύτητα της τεταγμένης του είναι ίση με την ταχύτητα της τετμημένης του.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} , με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f(1) = 0$ και την συνάρτηση g

$$\text{με } g(x) = \begin{cases} f'(0), & \text{αν } x = 0 \\ \frac{f(x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) \leq x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} .

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε το πρόσημο της των συναρτήσεων f και g στο \mathbf{R} .

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -\xi^2 g'(\xi)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία

ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x} f(x) - e^x$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι $f''(x) > \frac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $2f(x) > \sqrt{e}(x+2)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι αν $x > \alpha > 0$, τότε ισχύει η ανισότητα $2f(x) < f(x-\alpha) + f(x+\alpha)$.

Μονάδες 6

Να έχετε επιτυχία!