ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

2/12/2017

ΤΜΗΜΑΤΑ : $Γ_1$, $Γ_2$, $Ο_2$

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α) Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \alpha^x$, α>0, τότε f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$.

Β) Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Γ) Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 0$ τότε η συνάρτηση $g(x) = f(|x| - 1)$ είναι συνεχής στα $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

ii. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε η f δεν μπορεί να έχει ρίζα στο διάστημα (α, β).

iii. Αν f συνεχής στο (α, β), τότε δεν μπορεί να παρουσιάζει ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή στο (α, β).

iv. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο x_0.

v. Αν μια περιττή συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, τότε η f¢ είναι άρτια.

(Μονάδες: 8+7+10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1 & , x \le 1 \\ \sqrt{5 - x^2} & , x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x=1 τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\dfrac{3}{2}$ και $\beta = \dfrac{5}{2}$.

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+3h) - f(1-5h)}{h}$ **.**

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη προς την ευθεία y=-2x .

(Μονάδες: 10+7+8)

ΘΕΜΑ 3^{o}

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο [α,β] με σύνολο τιμών το [α,β] με 0<α<β και $\alpha<f(\alpha)<f(\beta)<\beta$. Να δείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(f(x_1)) = x_1$.

iii. Αν $0<\lambda<1$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \lambda\cdot\alpha + (1-\lambda)\cdot\beta$.

(Μονάδες: 7+10+8)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Αν f συνεχής στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f^3(x)+f(x)=x^3-4x+2$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, τότε :

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,2)$ και ακριβώς τρείς ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3 \in \mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 και ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση $x+y-1=0$.

iii. Θεωρούμε την συνάρτηση g με τύπο $g(x+1)=\ln|f(x)|,\ x\neq\rho_1,\rho_2,\rho_3$.

Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στην C_g στο σημείο $B(1,g(1))$.

(Μονάδες: 8+10+7)

Να έχετε επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2-12-2017

ΤΜΗΜΑ: $Γ_4$, $Ο_4$, ΠΕΤΡΑΚΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α . Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 10

Β . Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano .

Μονάδες 5

Γ . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=εφx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\left\{x/συνx=0\right\}$ και ισχύει

$$f'\left(x\right)=-\frac{1}{συν^2x}\ .$$

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o .

Μονάδες 2

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και υπάρχει $x_0 \in \left(\alpha,\beta\right)$ με $f\left(x_0\right)=0$, τότε $f\left(\alpha\right)\cdot f\left(\beta\right)<0$.

Μονάδες 2

4. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta=\left[\alpha,\beta\right]$,τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[m,M\right]$ με $m=f\left(\alpha\right)$ και $M=f\left(\beta\right)$.

Μονάδες 2

5. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της .

Μονάδες 2

Δ . Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

1. $f\left(x\right)=2\cdot x^5-3\cdot x^4+5\cdot x^2-6$

Μονάδες 1

2. $f\left(x\right)=2\cdot \eta\mu x+5\cdot \ln x-3\cdot \varepsilon\varphi x$

Μονάδες 1

3. $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-2\cdot x}{\eta\mu x}$

Μονάδες 1

4. $f\left(x\right)=x\cdot \sigma\upsilon\nu x+e^x\cdot\left(3\cdot x^2-7\cdot x+1\right)$

Μονάδες 1

5. $f\left(x\right)=\sqrt{\eta\mu\left(2\cdot x^4\right)}$

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases}4\cdot x^2-\alpha^2\cdot x \ , & \text{αν} \quad x\leq 1\\ 7\cdot x-\alpha-3 \ , & \text{αν} \quad x>1\end{cases}$

Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι :

1. συνεχής στο 1 .

Μονάδες 10

2. παραγωγίσιμη στο 1

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Οι συναρτήσεις $f \ , g : [\alpha \ , \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς , έχουν σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f\left(\alpha\right)=\alpha, f\left(\beta\right)=\beta$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$2\cdot f\left(\xi\right)=g\left(f\left(\xi\right)\right)+g\left(\xi\right) .$$

Μονάδες 20

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και ισχύουν $f\left(0\right)=0 \ , \ f\left(1\right)=1 \ , \ f\left(2\right)=1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $\left(0,2\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα x’x .

Μονάδες5

2. Η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Μονάδες 10

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=4\cdot x^3-2\cdot \kappa\cdot x+\kappa-1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Μονάδες 5

2. Η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(x_o,2)$.

Μονάδες 10

Καλή επιτυχία