Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Τμήματα: Γ_3 Γ_5 O_2
11-10-15

ΘΕΜΑ 1

Α: Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=l\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2013x)}{x}=2013l$.
2) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-2,5\right]$ και $f(-2)=3, f(3)=2$ τότε υπάρχει $x_0\in\left(-2,5\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=e$.
3) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και συνεχής στο $\left(\alpha,\beta\right]$ τότε η f παίρνει πάντα στο $\left[\alpha,\beta\right]$ μία μέγιστη τιμή.
4) Το όριο μίας συνάρτησης f στο x_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.
5) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$ τότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

Β: Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ ΄. Εάν $f(0)=5$ να υπολογίσετε το

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(1\right)+3\right)x^3+2014x-2015\right]$

Γ: Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α,β ώστε η

συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x+\beta}{x-2} & x<2\\ \\ 2\alpha x+\beta+5 & x\geq 2\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0=2$

ΘΕΜΑ 2

Α: Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{2-\sqrt{3x-8}}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(x^2+x+1\right)-\ln\left(x^4+1\right)\right)$
3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-3|+5|1-x|-10}{x^2-9}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x+1}-3\cdot 5^x}{5\cdot 3^x+2\cdot 5^{x-1}}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(2013x)}{\eta\mu(2014x)}$.

Β: Να υπολογίσετε τα λ,μ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+7}-\lambda x-\mu\right)=8$.

ΘΕΜΑ 3

Α: Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\left|f(x)\cdot\eta\mu x-3x\right|\leq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu x}{3x-\eta\mu x}$.

Β: Αν ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\eta\mu(\alpha x)}=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)f(x)\right]=2$ να βρεθεί το $\alpha\in\mathbb{R}^*$ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)g(x)\right]=27+\alpha^2$.

ΘΕΜΑ 4

Α: Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(2x)-f(-x)\cdot \eta\mu(3x)}{2x^2-\eta\mu^2 x}$

Β: Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει: $f^2(0)+4f^2(1)+2=2f(0)+4f(1)$.

1) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
2) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $\dfrac{f(x_0)}{x_0}=1$.

Γ: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$$6f(x_0)=f\left(-\frac{1}{2}\right)+2f(0)+3f\left(\frac{3}{4}\right).$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: $Γ_1$, $Γ_2$, $Ο_1$
11/10/2015

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

(Μονάδες 10)

Β. Να συμπληρώσετε με σωστό «Σ» ή λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο σημείο x_0.

ii. Αν $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

iii. Αν για την f ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x-1} \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

iv. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει πάντα ρίζα στο $\mathbb{R}$.

v. Αν f συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$ τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \left|2\sqrt{x} - 3\right|}{x-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left|x^2 - 5x + 6\right|}{(x-2)^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2^{2x} + 2^{x+1}} - 2^x\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^{2016} \cdot \left(\eta\mu \dfrac{2}{x}\right)^{2015}\right)$

(Μονάδες 16)

Β. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\sqrt{x+1}-1\right)g(x)\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}\right)=2$, τότε να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 3^{o}

i. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι: $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 2x}{2x+\sigma\upsilon\nu x-1}$.

(Μονάδες 12)

ii. Αν $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+\beta}{\sqrt{x}-1}, & \alpha\nu\ x>1\\ x^2+\beta x+4, & \alpha\nu\ x\leq 1\end{cases}$, τότε να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Αν $0<\alpha<\beta$ και f συνεχής στο [α,β], με $f([\alpha,\beta])=[\alpha,\beta]$ τότε δείξτε ότι:

i. Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει: $f(x_0)=\dfrac{1}{\alpha-x_0}-\dfrac{1}{x_0-\beta}$

(Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει $x_1\in[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύουν: $f(x_1)=x_1$ και $f(f(x_1))=x_1$

(Μονάδες 10)

iii. Υπάρχει $x_2\in[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει: $f^3(x_2)=f(\alpha)\cdot f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot f(\beta)$

(Μονάδες 08)

Να έχετε επιτυχία!

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ **11-10-2015**

ΤΜΗΜΑ : Γ_4

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^{O}

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=0$, τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Μονάδες 4

2. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$,τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[M,m]$ με $m=f(\alpha)$ και $M=f(\beta)$.

Μονάδες 4

3. Αν για κάθε $x \in (\sqrt{5},3)$ ισχύει $g(x)\le f(x)\le h(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\lambda$, τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lambda$.

Μονάδες 4

4. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της .

Μονάδες 4

5. Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} 3x\text{-}5 & ,\text{αν} \quad x>2 \\ x^2\text{-}3 & ,\text{αν} \quad x \le 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο

σημείο $x_0 = 2$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2^{O}

Α . Να υπολογιστούν τα όρια (αν υπάρχουν) :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2-\sqrt{x^2-x+5})$

Μονάδες 5

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2-5x+6}$

Μονάδες 5

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$

Μονάδες 5

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2|x-3|+5|1-x|-10}{x^2-9}$

Μονάδες 5

Β . Έστω η συνάρτηση $f\text{:}R \to R$. Αν $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = k \in R$ και ισχύει

$f^3\left(x\right)+f\left(x\right)\cdot \eta\mu^2 x = 2\cdot x^2 \cdot \eta\mu x, \quad x \in R$ να βρεθεί το k .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Α. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$f(x)=\dfrac{x+1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.Να δειχθεί ότι

η εξίσωση $f(x)=x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$.

Μονάδες 15

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+2\cdot x+\lambda^2 & , \ x \leq \mu \\ \eta\mu(x-\mu)-1 & , \ x>\mu \end{cases}$.

Αν η f είναι συνεχής , να βρείτε τους λ ,μ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

Α. Έστω η συνάρτηση $f \ :[0\ ,\ 1]\to \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα

για την οποία ισχύει $f(0)=e^{-1}$, $f(1)=5$. Να δείξετε ότι η

συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 10

Β. Οι συναρτήσεις f , $g:[\alpha\ ,\ \beta]\to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς , έχουν σύνολο

τιμών το διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)=\alpha, f(\beta)=\beta$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$2\cdot f(\xi)=g(f(\xi))+g(\xi)$.

Μονάδες 15

Καλή επιτυχία