

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

7-2-2016

ΤΜΗΜΑ: Γ₄

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν οι συναρτήσεις f και g

- είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία σταθερά c τέτοια ώστε

$$f(x) = g(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 10

B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδες 2

3. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι
γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

4. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε κρίσιμα σημεία της f είναι
μόνο τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία ισχύει $f'(x) = 0$.

Μονάδες 2

5. Ισχύει $(7^x)' = x \cdot 7^{x-1}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x \cdot \ln x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 2

2. Να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 3

3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία
καμπής αν υπάρχουν.

Μονάδες 2

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 3

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + 2 \cdot \ln x$.

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα
στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Μονάδες 3

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 5

3. Αν $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x+2}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$g(x) \geq g(x_0) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

4. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει η σχέση

$$f(x-2) < 2 \cdot f(x+1) - f(x+4).$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Αν ισχύει $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$, να δείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 5

B. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Αν η f στρέφεται κοίλα κάτω στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 4

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0,1]$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Μονάδες 3

4. Αν $\gamma \in (0,1)$ να δείξετε ότι : $f(x) \leq f'(\gamma) \cdot (x - \gamma) + f(\gamma)$, για κάθε $x \in (0,1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια ώστε για

κάθε $x > 0$ ισχύουν $x \cdot f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1) = 0$.

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ ως προς την μονοτονία και να εξετάσετε αν είναι 1 – 1 .

Μονάδες 2

2. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

Μονάδες 5

4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$, αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6

5. Να εξεταστεί η $h(x)$ ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι για

κάθε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2 \cdot e^5}$

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία

Κυριακή 7 Φεβρουαρίου 2016
Γραπτή δοκιμασία στα
Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Θέμα Α

A1. Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα Δ . Αν

- f, g συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

Μονάδες 8

A2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι έχει την ευθεία $y = l$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$;

Μονάδες 4

A3. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 3

A4. Σημειώστε ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιές Λάθος:

- α. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ , τότε $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- β. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και γνησίως φθίνουσα, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.
- γ. $(\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$
- δ. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- ε. $(\sigma\upsilon\nu 2x)' = 2\eta\mu 2x$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\ln x + x - 3$, $x > 0$.

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

δ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες στο παραπάνω ερώτημα με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$, ώστε

$$\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

και ότι η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 7

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left(\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right)$$

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία καμπής της τέμνονται στον $y'y$.

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii. $f'(0) < f(1) - f(0)$

iii. $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 7

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

γ. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{xg(x)}$$

Μονάδες 6

Να απαντήσετε σε **ΌΛΑ** τα θέματα

Καλή επιτυχία!

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ₁, Γ₂, Ο₁
7/2/2016

ΘΕΜΑ 1^ο

- A)** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα fermat.
- B)** Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής μιας συνάρτησης f .
- Γ)** Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:
- i.** Το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι ολικό μέγιστο της f .
 - ii.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(\mathbb{R}) = [a, \beta]$, τότε η f' δεν είναι 1-1.
 - iii.** Αν μια κυρτή και μια κοίλη συνάρτηση στο \mathbb{R} έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η κυρτή βρίσκεται πάνω από την κοίλη για κάθε $x \neq x_0$.
 - iv.** Μια συνάρτηση f και μια οποιαδήποτε ασύμπτωτή της δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
 - v.** Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$, τότε δεν έχει ασύμπτωτες.

(Μονάδες: 10+5+10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - x)$.

- i.** Να δείξετε ότι έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- ii.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii.** Αν ισχύει ότι $a^x - e^{f(x)} \leq \eta \mu \chi$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του θετικού αριθμού a .
- iv.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x = x + e^{2016}$.

(Μονάδες: 6+6+6+7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x} \left(f(x) - e^{\frac{1}{x}} \right) \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ και } f(1) = e, f'(-1) = \frac{2}{e}.$$

- i. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x \neq 0$.
- ii. Να δείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι ισχύει $2f(x) > \sqrt{e}(x+2)$ για κάθε $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και κατασκευάστε την C_f .

(Μονάδες: 8+5+6+6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση f κοίλη στο $[0, +\infty)$ με $f'(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση F η οποία είναι παράγουσα της f στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $F(0) = 0$ και $F(1) = 1$. Ορίζουμε ακόμα την συνάρτηση

$$g \text{ στο } [0, +\infty) \text{ με τύπο } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{F(x)}, & x > 0 \\ \frac{1}{f(0)}, & x = 0 \end{cases}$$

- i. Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 1$.
- iii. Να δείξετε ότι $F(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.
- iv. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F(x) \cdot \ln x)$.

(Μονάδες: 8+4+7+6)

Να έχετε επιτυχία!