ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 6-12-2015

ΤΜΗΜΑ:$Γ_4$

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$

Α . Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 10

Β . Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle .

Μονάδες 5

Γ . Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x / συνx = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{συν^2 x}$.

   Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o .

   Μονάδες 2

3. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο x_o ισχύει $(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) - f(x_o) \cdot g'(x_o)$.

Μονάδες 2

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

Μονάδες 2

5. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) > 0$.

Μονάδες 2

Δ . Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

1. $f(x) = 3 \cdot x^6 - 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x - 1$

Μονάδες 1

2. $f(x) = 7 \cdot e^x + 2 \cdot \ln x - 6 \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 1

3. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

Μονάδες 1

4. $f(x) = x \cdot \eta\mu x - e^x \cdot (2 \cdot x^2 - 4)$

Μονάδες 1

5. $f(x) = \sqrt{\eta\mu(2 \cdot x^4)}$

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Α .Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 4\cdot x^2-\alpha^2\cdot x \ , & \text{αν} \quad x\le 1 \\ 7\cdot x-\alpha-3 \ , & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}$

1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x=1$.

Μονάδες 5

2. Για $\alpha=0$ ή $\alpha=1$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$

Μονάδες 5

Β .Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

$f(1)=f(2)$ και $2\cdot f'(1)=f'(2)$.

Αν $g(x)=\begin{cases} f(2\cdot x) & ,x\ge 1 \\ f(4\cdot x-3) & ,x<1 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και ισχύουν $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=1$.Να δείξετε ότι :

1. Η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει ρίζα στο $(0,2)$.

Μονάδες 8

2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα $(0,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα x'x .

Μονάδες8

3. Υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)<0$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^{o}

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot \kappa \cdot x + \kappa - 1$.Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$.

Μονάδες 8

2. Η εξίσωση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(x_o, 2)$.

Μονάδες 8

3. Αν $\kappa > 1$, τότε υπάρχει $\xi \in (0, x_o)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 0$.

Μονάδες 9

Καλή επιτυχία

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: $Γ_1$, $Γ_2$, $Ο_1$
6/12/2015

ΘΕΜΑ 1^ο

Α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0. Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Γ) Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν για την συνάρτηση f υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, τότε ισούται με $f'(x_0)$.

ii. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο x_0.

iii. Αν σημείο $M\big(x(t),y(t)\big)$ κινείται πάνω στην ευθεία y=2x+1, τότε η ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον xx′ είναι διπλάσια από την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον άξονα yy′.

iv. Αν μια περιττή συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η f' είναι άρτια και αντιστρόφως.

v. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

(Μονάδες 10+5+10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}αx^2+βx+1 & ,x\leq 1\\ \sqrt{5-x^2} & ,x>1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x=1 τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $α=-\dfrac{3}{2}$ και $β=\dfrac{5}{2}$.

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-5h)}{h}$.

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη προς την ευθεία y=-2x .

(Μονάδες 10+7+8)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ για την οποίες ισχύει η σχέση $f(x)-\ln x = g(x)+e^x-\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε να δείξετε ότι :

i. Οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

ii. Οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν στο κοινό σημείο τους κοινή εφαπτομένη.

iii. Αν επιπλέον ισχύει ότι f είναι συνάρτηση 1-1 με f^{-1} παραγωγίσιμη και η ευθεία y=ex+1 είναι εφαπτομένη της C_f στο x=1, τότε:

α. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο x=1.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο x=e+1

(Μονάδες 8+7+10)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\le\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, $f'(\alpha)=0$ και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} & ,\ \text{άν } x>\alpha\\ 0 & ,\ \text{άν } x=\alpha\end{cases}$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$ και ότι η εξίσωση $f'(x)=0$, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\ne\xi_2$ ώστε να ισχύει: $e^{f(\xi_1)}\cdot f'(\xi_1)+e^{f(\xi_2)}\cdot f'(\xi_2)=0$.

iii. Να δείξετε ότι για την συνάρτηση g εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

iv. Να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f σε σημείο $M(\xi,f(\xi))$ με $\xi\in(\alpha,\beta)$ η οποία να διέρχεται και από το σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$.

(Μονάδες 6+7+6+6)

Να έχετε επιτυχία!

Κυριακή 6 Δεκεμβρίου 2015

Γραπτή δοκιμασία στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θέμα A

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ln|x|$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 8

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα *Rolle* του διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 3

A4. Σημειώστε ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιές Λάθος:

α. Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in\Delta$, τότε η f είναι γνήσίως μονότονη στο Δ.

β. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση a, τότε $f'(a) \geq 0$.

γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

δ. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (a, b).

ε. Αν f, g παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in\Delta$, τότε $f'(x) > g'(x)$, για $x \in\Delta$.

Μονάδες 10

Θέμα B

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$, το $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Γ1 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$, αν $f(0) = 1$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την $f'(x)$ και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Γ2 Δίνεται η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) = \alpha + \beta - \xi$.

Μονάδες 6

β. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = 1$.

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - lnx$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = lnx$ στο σημείο $A(a, lna)$ με $a > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(b, e^b)$ με $b \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός a είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε γιατι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

Μονάδες 3

Να απαντήσετε σε ΌΛΑ τα θέματα

Καλή επιτυχία!