ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 3 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat και να το ερμηνεύσετε γραφικά.

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell$ με $\ell>0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\ell$.

Μονάδες 2

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} (αν υπάρχουν) είναι λύσεις της εξίσωσης $f(f(x))=x$.

Μονάδες 2

γ) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε $f(x)=c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες 2

δ) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, τότε η C_f έχει πάντα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Μονάδες 2

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = \left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right|$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^3 - x^2, & \text{αν } x \le 1 \\ x\ln(\beta x), & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και $\beta>0$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 4

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον yy' και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e,f(e))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ορισμένη στο A με σύνολο τιμών $f(A)=[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x\in A$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $A=[1,+\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $f\circ f$ και έπειτα να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e+1} e^{f(x)}\cdot f(x)\,dx$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι:

α) για $1<x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)+f'(x_2)<f(x_2)+f'(x_1)$

Μονάδες 4

β) για κάθε $x>1$ ισχύει: $(x^2+1)f(x^2)>x^2f(1)+f(x^4)$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}+1-\dfrac{1}{x}-f'(x)$, για κάθε $x>0$.
- $f(1)=\dfrac{e+1}{e}$
- $e(1-f(x))\le x-2$, για κάθε $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = -\dfrac{1}{e}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln x + x + e^{-x}$, $x > 0$

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο $x_0 \in (0,2)$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) > 1$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει μοναδικό $x_1 < x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(2)$

Μονάδες 3

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) - f(2) = f'(\xi)$

Μονάδες 4

Δ5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\eta\mu \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} \cdot \ln f(x) \right)$.

Μονάδες 4

Να έχετε επιτυχία!