

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ₁, Γ₂, ΓΤ₁, ΓΤ₂
5/10/2014

ΘΕΜΑ 1^ο

Να συμπληρώσετε με σωστό «Σ» ή λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Αν f, g ορισμένες στο \mathbb{R} και $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a=\beta$ τότε $f(g(a)) = f(g(\beta))$.
- ii. Αν f άρτια συνάρτηση τότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη.
- iii. Αν f συνάρτηση 1-1, τότε ισχύει $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.
- iv. Αν για τις f, g ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- v. Αν $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- vi. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε $f(x) = g(x)$ κοντά στο σημείο x_0 .
- vii. Αν f περιπτή και $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 2^ο

- i. Αν $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = e^x$, να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $f \circ f$ και να εξετάσετε αν $g \circ h = h \circ g$.
- (Μονάδες 09)
- ii. Να βρεθεί η συνάρτηση f σε κάθε περίπτωση:
- α)** $f(e^x - 1) = x^2 - 3x + 1$
- β)** $(g \circ f)(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \ln x$, με $x > 0$ και $f(x) > 0$
- (Μονάδες 04)
- iii. Αν για την f ισχύει $e^{f(x)} = x - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:
- α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, να βρείτε την f^{-1} , τα $f(1)$ και $f(2 + \ln 2)$ και να λύσετε την ανίσωση $e^{x-4} - e^{2x+1} > x + 5$.
- β)** Να εξετάσετε αν έχει λύση η εξίσωση $f(f(x)) = x$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3°

i. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν) :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - |2\sqrt{x} - 3|}{x - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{(x - 2)^2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+3} - 2x - 1}{x - 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x + |x|}$$

(Μονάδες 16)

ii. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} ((\sqrt{x+1} - 1)g(x)) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu 2x} \right) = 2$, τότε να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4°

i. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι: $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu 2x}{2x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$.

(Μονάδες 12)

ii. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + \beta}{\sqrt{x} - 1}, & \text{αν } x > 1 \\ x^2 + \beta x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$, τότε να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν

γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

Να έχετε επιτυχία!