

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ₁, Γ₂, ΓΤ₁, ΓΤ₂
30/11/2014

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο x_0 . Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

(Μονάδες 10)

B) Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Αν f συνεχής στο $x = 2$ τότε η $g(x) = f(x + 1)$ είναι συνεχής στο $x = 1$.
- ii. Αν f συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο $[-3, 0]$ με σύνολο τιμών το $[1, 4]$ τότε η εξίσωση $f(x) = \pi$ έχει μοναδική αρνητική ρίζα.
- iii. Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \cdot f(\beta) > 0$ τότε η f δεν έχει ρίζα στο (a, β) .
- iv. Αν f ορισμένη στο $[a, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $f(a) + f(\beta) = 0$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.
- v. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο x_0 .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + 1 & , x \leq 1 \\ \sqrt{5 - x^2} & , x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$ τότε :

- i. Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{5}{2}$ (Μονάδες 10)
- ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 3h) - f(1 - 5h)}{h}$ (Μονάδες 07)
- iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x$ (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 3°

Αν $0 < a < \beta$ και f συνεχής στο $[a, \beta]$, με $f([a, \beta]) = [a, \beta]$ τότε δείξτε ότι:

i. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε να ισχύει: $f(x_0) = \frac{1}{a - x_0} - \frac{1}{x_0 - \beta}$

(Μονάδες 08)

ii. υπάρχει $x_1 \in [a, \beta]$ ώστε να ισχύει: $f(f(x_1)) = f(a + \beta - x_1)$

(Μονάδες 09)

iii. υπάρχει $x_2 \in [a, \beta]$ ώστε να ισχύει: $f^3(x_2) = f(a) \cdot f\left(\frac{a + \beta}{2}\right) \cdot f(\beta)$

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4°

Αν f, g παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ για την οποίες ισχύει η σχέση

$$f(x) - \ln x = g(x) + e^x - \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty), \text{ τότε να δείξετε ότι :}$$

i. Οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

(Μονάδες 10)

ii. Οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν στο κοινό σημείο τους κοινή εφαπτομένη.

(Μονάδες 07)

iii. Αν η ευθεία $y = ex + 1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x=1$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x=1$.

(Μονάδες 08)

Να έχετε επιτυχία!