ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 ΜΑΡΤΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής μίας συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος,*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$, τότε ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

β) Αν μια κυρτή και μια κοίλη συνάρτηση έχουν κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία τότε η γραφική παράσταση της κυρτής βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της κοίλης.

γ) Αν f και f' είναι συνεχείς στο διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε ισχύει ότι $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = \int_{\alpha}^{x} f'(t)\,dt$ για κάθε $x \in \Delta$.

δ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2+1}\,dx < 0$, τότε ισχύει $\alpha > \beta$.

ε) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \int_{x}^{1-x} \ln t\,dt$ είναι το διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,e]$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1,e]$ και επιπλέον ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(e) = e$.

Β1. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία (ε): $y = -x + e + 1$ μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,e)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,e)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

Μονάδες 7

Β4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1,e)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\int_{1}^{e} f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (e-1)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ για την οποία ισχύει $f\left(0\right)=0$ και συνάρτηση $g:\left[0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $g(x)=\int_0^1 tf(xt)dt$ για κάθε $x\geq 0$ και $g(1)=1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt, & \text{αν } x>0\\ 0 & \text{, αν } x=0\end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$.

Μονάδες 4

Γ3. Αν $F\left(x\right)=\int_0^x\left(tf\left(t\right)-1\right)dt,\ x\geq 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,1\right)$ ώστε να ισχύει: $x_0\cdot f\left(x_0\right)=1$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν ισχύει $\int_0^x tf\left(t\right)dt\leq x^2$ για κάθε $x>0$, να βρείτε το $f\left(1\right)$

Μονάδες 5

Γ5. Αν $f\left(1\right)=2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\int_1^x f\left(t\right)dt\right)^2}{\left(x-1\right)\int_1^x f^2\left(t\right)dt}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^{f(x)}(e^t+1)\,dt = x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f\left(1\right)=0$ και ότι ισχύει $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και έχει αντίστροφη την συνάρτηση $f^{-1}\left(x\right)=e^x+x$.

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:
$\int_x^{2015} t\cdot f\left(t\right)\,dt > \int_x^{2015} x\cdot f\left(t\right)\,dt$, για κάθε $x\in\left(1,2015\right)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον xx' και τις ευθείες x=1 και x=1+e.

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
4. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 12.30 π.μ.

<u>ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ</u>