ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: $Γ_1$, $Γ_2$, $ΓΤ_1$, $ΓΤ_2$
1 / 2 / 2015

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

(Μονάδες 10)

Β) Να αποδώσετε την Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

(Μονάδες 05)

Γ) Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

iii. Αν η f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα Δ, τότε ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ .

iv. Το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι το ολικό μέγιστο της f.

v. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο, τότε η C_f δέχεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = f'(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - x$ και να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 10)

ii. Αν ισχύει ότι $α^x \leq e^{f(x)-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του θετικού αριθμού α.

(Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln(e^x - x) = 1$ στο $(-\infty, 2]$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(0)=f(1)=0$ και $f'(0)=-1$.

i. Να δείξετε ότι ισχύει $f(x)\leq x\cdot f'(x)$ για κάθε $x\geq 0$.

(Μονάδες 06)

ii. Αν $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} &, \text{άν } x>0 \\ -1 &, \text{άν } x=0 \end{cases}$ τότε να δείξετε ότι η g είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

(Μονάδες 06)

iv. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)\cdot\xi-f(\xi)=\xi^2$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με $f([1,3])=[-1,4]$ με $f(1)=1$ και $f(3)=3$.

i. Δείξτε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη προς την ευθεία ψ=x.

(Μονάδες 04)

ii. Δείξτε ότι υπάρχουν ρ_1, $\rho_2\in(1,3)$ ώστε να ισχύει: $f'(\rho_1)=f'(\rho_2)=0$.

(Μονάδες 06)

iii. Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(1,3)$ ώστε να ισχύει: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

(Μονάδες 04)

iv. Δείξτε ότι υπάρχουν x_0, x_1, $x_2\in(1,3)$ διαφορετικά ανά δύο ώστε να ισχύουν:

$f(x_0)=0$ και $\dfrac{1}{f'(x_1)}-\dfrac{3}{f'(x_2)}=-2$.

(Μονάδες 05)

v. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 06)

Να έχετε επιτυχία!