

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

6-10-2019

ΤΜΗΜΑ: Β<sub>5</sub>

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Αν  $\vec{\alpha} = (3, -5)$ ,  $\vec{\beta} = (-6, 10)$  τότε  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

Μονάδες 4

2. Αν ισχύει  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .

Μονάδες 4

3. Αν ισχύει  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$  τότε  $((\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha})) = 2 \cdot \pi$ .

Μονάδες 4

4. Αν  $\vec{\alpha} = (1, -3)$ ,  $\vec{\beta} = (-1, -3)$ ,  $\vec{\gamma} = (2, -6)$  τότε ισχύει  $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .

Μονάδες 4

5. Αν ισχύει  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ .

Μονάδες 4

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Αν  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$  τότε από τις παρακάτω σωστή είναι:

i)  $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$     ii)  $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$     iii)  $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$     iv)  $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}$

Μονάδες 3

2. Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1 + \lambda, \nu - 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, 2)$  είναι ίσα τότε:  
i)  $\lambda = -1, \nu = 3$  ii)  $\lambda = 1, \nu = 4$  iii)  $\lambda = 1, \nu = -4$  iv)  $\lambda = -2, \nu = 0$

**Μονάδες 2**

### **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα

$\vec{OA} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ ,  $\vec{OB} = 3 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{OG} = 5 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$ , όπου  $\vec{i}$  και  $\vec{j}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{BG}$ .

**Μονάδες 12**

2. Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A, B, \Gamma$  μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

**Μονάδες 13**

### **ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, -1)$ ,  $\vec{\beta} = (2, 5)$  και  $\vec{\gamma} = (4, 7)$ .

1. Να αποδείξετε ότι ανά δύο δεν είναι παράλληλα.

**Μονάδες 6**

2. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $|\vec{\gamma}|^2 = 2 \cdot |\vec{\beta}|^2 + \frac{7}{2} \cdot |\vec{\alpha}|^2$ .

**Μονάδες 5**

3. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει το  $\vec{\alpha}$  με το άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

4. Να εκφραστεί το  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**Μονάδες 8**

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$ . Θεωρούμε το σημείο Ε στην πλευρά ΑΔ και το σημείο Ζ στην διαγώνιο ΑΓ έτσι ώστε  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$  και  $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AG}$ . Να αποδείξετε ότι :

1.  $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ .

**Μονάδες 8**

2.  $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4} \cdot \left( \vec{\alpha} - \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} \right)$  και να υπολογίσετε συναρτήσει των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  το διάνυσμα  $\overrightarrow{EB}$ .

**Μονάδες 12**

3. τα σημεία Ε, Ζ, Β είναι συνευθειακά.

**Μονάδες 5**

*Καλή επιτυχία*

# Μαθηματικά Κατεύθυνσης

## Β' Λυκείου

6/10/19

### Θέμα 1<sup>ο</sup> (20 μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AE} = 7\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma}$$

- Να γράψετε το διάνυσμα  $\overrightarrow{\Delta E}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .
- Να δείξετε ότι  $\overrightarrow{\Delta E} \uparrow \downarrow \overrightarrow{B\Gamma}$ .
- Να δείξετε ότι  $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\frac{\overrightarrow{\Delta E}}{4} + \overrightarrow{\Delta B}$ .

### Θέμα 2<sup>ο</sup> (25 μονάδες)

Δίνονται τα αντίθετα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 6\lambda)$ ,  $\vec{\beta} = (3\lambda, -36\lambda^2 + 6)$  και το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (-1, -\lambda)$

- Να δείξετε ότι  $\lambda = -\frac{1}{3}$ .
- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\nu} = \vec{\alpha} - 3\vec{\gamma}$ .
- Να βρείτε το  $\mu$ , ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\mu} = (\mu, 3 - \mu^2)$ , να είναι συγγραμμικά.

### Θέμα 3<sup>ο</sup> (25 μονάδες)

Θεωρούμε τα σημεία  $O$ ,  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$5\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{O\Gamma}$$

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  είναι συνευθειακά.
- Να βρείτε την σχετική θέση των σημείων  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .
- Αν  $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 5$ , να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .
- Αν  $K$ ,  $\Lambda$  σημεία του επιπέδου, να αποδείξετε ότι:  
$$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{\Lambda A} + 2\overrightarrow{B\Lambda} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{\Lambda\Gamma}$$

### Θέμα 4<sup>ο</sup> (30 μονάδες)

Δίνονται τα σημεία  $A(4, -1)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(3, 5)$

- Να δείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου.
- Να βρείτε το μήκος της διαμέσου  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Να βρείτε σημείο  $\Delta$ , ώστε το τετράπλευρο  $A\Gamma\Delta B$ , να είναι παραλληλόγραμμο.
- Να βρείτε σημείο  $E$ , του άξονα  $\gamma'\gamma$ , ώστε το τρίγωνο  $EAB$  να είναι ισοσκελές με βάση  $AB$ .

**Καλή Επιτυχία**

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Τμήματα : Β<sub>1</sub> , Β<sub>2</sub> , ΒΙ<sub>1</sub>

Ημερομηνία: 6 / 10 / 2019

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδειχθεί ότι αν  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  και  $M$  μέσο του ευθυγράμμου

τμήματος  $AB$ , τότε  $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ .

(Μονάδες 6)

**A2.** Να δώσετε τον ορισμό του γινομένου ενός πραγματικού αριθμού  $\lambda$  με ένα διάνυσμα  $\vec{a}$ .

(Μονάδες 5)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Για τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  ισχύει  $|\vec{a} - \vec{\beta}| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \right|$ .

ii. Από την ισότητα  $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$  συμπεραίνουμε ότι  $\vec{\Gamma A} = \vec{\Delta B}$ .

iii. Αν  $\vec{a}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$  με  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$  και ισχύει  $\vec{a} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0}$ , τότε  $\lambda > 0$ .

iv. Αν ισχύει  $(\lambda - \mu)(\vec{a} + \vec{\beta}) = \vec{0}$ , τότε  $\lambda = \mu$  ή  $\vec{a} = -\vec{\beta}$ .

v. Αν  $\vec{OA} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$  και  $O(0,0)$ , τότε  $A(3, -2)$ .

vi. Τα διανύσματα  $\vec{u} = (-1, 3)$  και  $\vec{v} = (2, -6)$ , είναι αντίρροπα.

vii. Αν το σημείο  $M(3,1)$  είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  και  $A(-2,4)$ , τότε  $B(8, -2)$ .

(Μονάδες 14)

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ζ, Ε, ώστε  $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{GZ} = -\frac{2}{5}\vec{AG}$   
και  $\vec{BG} = 2\vec{GE}$ . Αν  $\vec{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{AG} = \vec{\beta}$  τότε :

**Β1.** Να σχεδιάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ και να σημειώσετε τα σημεία Δ, Ζ, Ε .

**Β2.** Να εκφράσετε τα  $\vec{BG}$ ,  $\vec{\Delta Z}$ ,  $\vec{\Delta E}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**Β3.** Δείξτε ότι τα σημεία Δ, Ζ, Ε είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7+9+9)

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ΑΒΓ τρίγωνο και Μ μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

**Γ1.** Αν για σημείο Ρ ισχύει η σχέση  $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} = \vec{0}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AM}$ .

**Γ2.** Αν  $A(3, -1)$ ,  $B(5, 0)$  και  $\Gamma(-1, 2)$ , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ και να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{v} = (-10, 10)$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$ .

**Γ3.** Αν Δ σημείο τέτοιο ώστε ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(Μονάδες 8+10+7)

### ΘΕΜΑ Δ

Αν για τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$  ισχύουν:  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ,  $|\vec{\alpha}| = 4$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$ ,  $|\vec{\gamma}| = 6$ ,  $|\vec{\delta}| = 8$ , τότε:

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ,  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  και ισχύει ότι  $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta} = -\frac{2}{3}\vec{\gamma}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\delta} \perp \vec{0}$ .

**Δ3.** Αν για τα διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}$  ισχύουν  $\vec{u} - \vec{\delta} = \vec{0}$ ,  $|\vec{v}| = 4$  και  $\vec{u} + 4\vec{v} = \vec{\delta}$ , τότε να εκφράσετε τα  $\vec{u}, \vec{v}$  συναρτήσει του  $\vec{\delta}$ .

(Μονάδες 12+6+7)