

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1-12-2019

ΤΜΗΜΑ: Β₅, Β₆

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Αν $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$, $\vec{\gamma} = (2, -6)$ τότε ισχύει $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Μονάδες 2

2. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Μονάδες 2

3. Ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Μονάδες 2

4. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, -2)$ τότε ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

Μονάδες 2

5. Ισχύει $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$.

Μονάδες 2

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -3)$ έχει αρχή το σημείο $(-2, 4)$. Το πέρας του είναι:

- i) $(-3, 1)$ ii) $(3, 1)$ iii) $(-3, -1)$ iv) $(7, 1)$

Μονάδες 3

2. Αν $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\vec{\beta} = \left(x, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε το x είναι:

- i) $\frac{1}{4}$ ή $-\frac{1}{4}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{5}{16}$ iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 4

3. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ τότε :

- i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$ ii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$ iii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$ iv) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Μονάδες 4

4. Αν $\vec{\alpha} = (-2, 3), \vec{\beta} = (4, -1)$ τότε η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι :

- i) ορθή ii) οξεία iii) αμβλεία iv) 0°

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 5

2. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 3 \cdot \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 10

3. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{\beta} = -\vec{i}$ και $\vec{\gamma} = 4 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{i}$.

1. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$.

Μονάδες 6

2. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

B. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(-1, 0)$, $\Gamma(-4, 4)$.

1. Να βρείτε σημείο Δ του επιπέδου τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

2. Αν K το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ του ερωτήματος 1 και E το σημείο τομής της $A\Delta$ με τον άξονα $y'y$, να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{KE} .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 3

2. Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = -2$.

Μονάδες 6

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 8

iii. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3 \cdot \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 8

Καλή επιτυχία

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Β' Λυκείου

1/12/19

Θέμα Α (20 μονάδες)

A1. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\vec{a} = -3\vec{\beta}$ τότε $|\vec{a}| = -3|\vec{\beta}|$

β. Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{a}||\vec{\beta}| = 0$ τότε $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

A3. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1, \text{ όπου } \lambda_1 = \lambda_{\vec{a}} \text{ και } \lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}} \left(\vec{a}, \vec{\beta} \nabla y'y \right)$$

Θέμα Β (25 μονάδες)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda + 1, 2)$ και $\vec{\beta} = (1, -3\lambda)$

B1. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$

B2. Για $\lambda = -3$ να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$

B3. Για $\lambda = -2$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\nu}$ ώστε: $\vec{\nu} \perp \vec{a}$ και $|\vec{\nu}| = 5$

Θέμα Γ (25 μονάδες)

Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 120^\circ$. Έστω επιπλέον τα διανύσματα $\vec{\nu} = \vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{\mu} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

Γ1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

Γ2. Τα μέτρα $|\vec{\nu}|$, $|\vec{\mu}|$ των διανυσμάτων $\vec{\nu}$ και $\vec{\mu}$.

Γ3. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\nu} \cdot \vec{\mu}$.

Γ4. Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\nu}$ και $\vec{\mu}$.

Θέμα Δ (30 μονάδες)

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Δ1. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

Δ2. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Δ3. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma} \cdot \vec{a}$.

Δ4. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας $(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$.

Δ5. Δένεται το διάνυσμα $\vec{\delta} = x \cdot \vec{a} + \vec{\beta}$. Να βρεθεί το x ώστε $\vec{\gamma} \perp \vec{\delta}$.

Καλή Επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Τμήματα : Β₁ , Β₂ , ΒΙ₁

Ημερομηνία: 1 / 12 / 2019

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, ισχύει $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 10)

A2. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i.** Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
- ii.** Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει η ισοδυναμία $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$.
- iii.** Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < (\vec{\alpha} \hat{=} \vec{\beta}) \leq \pi$.
- iv.** Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
- v.** Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2 \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ έτσι ώστε ισχύει $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AG} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

B1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

B2. Να βρείτε τα μήκη της πλευράς ΒΓ και της διαμέσου ΑΜ.

B3. Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων \overrightarrow{AM} και $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7+10+8)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, 1 - |\vec{\alpha}|)$ με $\lambda_{\vec{\alpha}} \neq 0$

και $\vec{\beta} = \left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{5}, -5 \right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (10, -5)$.

Γ2. Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Γ3. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ με την συνιστώσα $\vec{\beta}_1$ να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8+7+10)

ΘΕΜΑ Δ

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν: $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 4$, τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 2\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Δ2. Αν για διάνυσμα \vec{v} ισχύουν $\vec{v} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\gamma})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{v} + \vec{\gamma})$, τότε να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{v} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Δ3. Αν για διάνυσμα \vec{u} ισχύει $(\vec{\alpha} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{u}$, τότε να δείξετε ότι $\vec{v} = -2\vec{u}$.

(Μονάδες 8+8+9)