

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

7-10-2017

ΤΜΗΜΑ: Β₄, Β₆, Β₀₃

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$.

Μονάδες 4

2. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

3. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}}) = 60^\circ$.

Μονάδες 4

4. Αν το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ τότε ισχύει $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Μονάδες 4

5. Αν ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε από τις παρακάτω σωστή είναι:

i) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$ ii) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ iii) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$ iv) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}$

Μονάδες 3

2. Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$:

i) $\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$ ii) $\frac{1}{4}\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}$ iii) $2\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}$ iv) $-2\vec{\alpha} - 12\vec{\beta}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και Ο σημείο του επιπέδου. Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ που ορίζονται από τις ισότητες

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}, \quad \overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$$

1. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 10

3. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι μέσο του τμήματος ΒΓ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Κ, Λ, Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$.

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 12

2. Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}, \quad \text{όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.}$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε το σημείο $Ε$ στην πλευρά $ΑΔ$ και το σημείο $Ζ$ στην διαγώνιο $ΑΓ$ έτσι ώστε $\overrightarrow{ΑΕ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{ΑΓ}$. Να αποδείξετε ότι :

1. $\overrightarrow{ΑΖ} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

Μονάδες 8

2. $\overrightarrow{ΕΖ} = \frac{1}{4} \cdot \left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} \right)$ και να υπολογίσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{ΕΒ}$.

Μονάδες 12

3. τα σημεία $Ε$, $Ζ$, $Β$ είναι συνευθειακά .

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία

Σάββατο 7 Οκτωβρίου 2017
Γραπτή δοκιμασία στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Β' Λυκείου

Θέμα Α

A1 Να σχεδιάσετε και να γράψτε με τι ισούται η διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος.

A2 Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες:

α. Αν $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ τότε $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$.

β. Αν $AB\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο, τότε $\vec{AB} = \vec{A\Gamma}$.

γ. Αν $\vec{AB} = 2\vec{BC}$ τότε το B βρίσκεται ανάμεσα στα A και C .

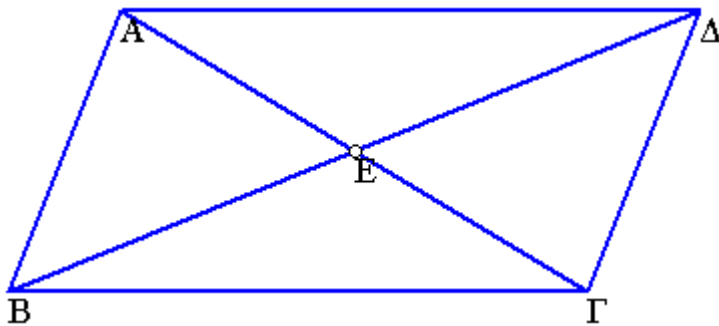
δ. Έστω τρίγωνο ABO . Ισχύει $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

ε. Αν το διάνυσμα $2\vec{a} - \vec{b}$ είναι συγγραμικό του \vec{a} , τότε το $2\vec{a} - \vec{b}$ είναι συγγραμικό του \vec{b} .

Μονάδες 25

Θέμα Β

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.



α. Εκφράστε το διάνυσμα $\vec{B\Delta}$ ως προς τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{B\Gamma}$.

β. Εκφράστε το διάνυσμα $\vec{E\Delta}$ ως προς τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{B\Gamma}$.

γ. Εκφράστε το διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ ως προς τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{B\Gamma}$.

δ. Εκφράστε το διάνυσμα $2\vec{A\Gamma}$ ως προς τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{B\Gamma}$.

Μονάδες 25

Θέμα Γ

Έστω K, A, B, Γ σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $5\vec{KA} + 3\vec{KB} = 8\vec{K\Gamma}$.

α. Δείξτε ότι τα A,B και Γ είναι συνευθειακά.

β. Αν $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 10$, να υπολογίσετε τα $|\overrightarrow{AB}|$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}|$.

Μονάδες 25

Θέμα Δ

α. Να δείξετε ότι αν $|\vec{a}| \leq 2$ και $|\vec{b}| \leq 5$, τότε:

$$|4\vec{a} + 3\vec{b}| \leq 23$$

β. Να βρεθεί σημείο M στο επίπεδο παραλληλογράμμου $ABGD$ τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}$$

Μονάδες 25

Να απαντήσετε σε ΌΛΑ τα θέματα

Καλή επιτυχία!

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
B' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ : B₁ , B₂ , B₀₂, B₈
7/10/2017**

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδειχθεί ότι αν AB ευθύγραμμο τμήμα και O ένα σημείο αναφοράς, τότε για την διανυσματική ακτίνα του μέσου M του AB ισχύει:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \quad (\text{Μονάδες } 05)$$

B. Να συμπληρώσετε με 'Σ' ή 'Λ' για Σωστό ή Λάθος αντίστοιχα στις παρακάτω προτάσεις:

Αν ABΓ ισόπλευρο τρίγωνο και AM διάμεσος τότε ισχύουν:

i. $\overline{AB} - \overline{GB} = \overline{GA}$

ii. Αν M μέσο BΓ τότε $\overline{BA} + \overline{GA} = 2 \cdot \overline{MA}$

iii. Ισχύει ότι $(\overline{AB}, \overline{BG}) = 60^\circ$

iv. Ισχύει ότι $(\overline{BA}, \overline{GA}) = 120^\circ$

v. Ισχύει ότι $\overline{BM} = -\frac{1}{2}\overline{GB}$

(Μονάδες 10)

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν ισχύει $\overline{KL} = \overline{MN}$, τότε ισχύει $\overline{MK} = \dots\dots\dots$.

ii. Για οποιαδήποτε διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα:
 $\dots\dots\dots \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq \dots\dots\dots$.

iii. Αν τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \dots\dots\dots$.

iv. Αν $\overline{AB} // \overline{B\Gamma} // \overline{B\Delta}$, τότε τα σημεία A, B, Γ και Δ είναι $\dots\dots\dots$.

v. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $(\lambda - \mu)(\vec{a} + \vec{\beta}) = \vec{0}$, τότε ισχύει $\dots\dots\dots$ ή $\dots\dots\dots$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2°

Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και Κ σημείο τομής των διαγωνίων, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι για τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου ισχύει
 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4 \cdot \vec{OK}$.

(Μονάδες 12)

- ii. Να προσδιοριστεί σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση:
 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ζ, Ε, ώστε $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{GZ} = -\frac{1}{3}\vec{AG}$ και $\vec{GE} = \vec{BG}$. Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$ τότε :

- i. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ και να σημειώσετε πάνω σε αυτό τα σημεία Δ, Ζ, Ε. (Μονάδες 07)
- ii. Να εκφράσετε τα \vec{BG} , \vec{DZ} , \vec{DE} συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 09)
- iii. Δείξτε ότι τα σημεία Δ, Ζ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4°

Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ισχύει $\vec{a} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 3$ και $|\vec{\delta}| = 8$, τότε:

- i. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα. (Μονάδες 10)
- ii. Να δειχθεί ότι $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\delta} \neq \vec{0}$ (Μονάδες 05)
- iii. Αν για τα διανύσματα \vec{u}, \vec{v} ισχύουν $\vec{u} \uparrow \uparrow \vec{a}$, $|\vec{v}| = 12$ και $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{a}$, να υπολογίσετε τα \vec{u}, \vec{v} συναρτήσει του \vec{a} .

(Μονάδες 10)

Να έχετε επιτυχία!