

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

11-10-2015

ΤΜΗΜΑ: Β₂, Β₈, ΖΩΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Αν $\vec{\alpha} = (3, -5)$, $\vec{\beta} = (-6, 10)$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

2. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

3. Αν ισχύει $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ τότε $((\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha})) = 2 \cdot \pi$.

Μονάδες 4

4. Αν $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$, $\vec{\gamma} = (2, -6)$ τότε ισχύει $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Μονάδες 4

5. Αν ισχύει $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

1. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε από τις παρακάτω σωστή είναι:

i) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$ ii) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ iii) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$ iv) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Delta}$

Μονάδες 3

2. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 + \lambda, \nu - 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 2)$ είναι ίσα τότε:

i) $\lambda = -1, \nu = 3$ ii) $\lambda = 1, \nu = 4$ iii) $\lambda = 1, \nu = -4$ iv) $\lambda = -2, \nu = 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και O σημείο του επιπέδου. Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ που ορίζονται από τις ισότητες

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\beta} + 5 \cdot \vec{\gamma}, \quad \overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3 \cdot \vec{\beta} + 4 \cdot \vec{\gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\Gamma} = 3 \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6 \cdot \vec{\gamma}$$

1. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. **Μονάδες 5**

2. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά. **Μονάδες 10**

3. Να αποδείξετε ότι το A είναι μέσο του τμήματος $B\Gamma$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα

$\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3 \cdot \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 5 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$, όπου \vec{i} και \vec{j} είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$. **Μονάδες 12**

2. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B, Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε το σημείο Ε στην πλευρά ΑΔ και το σημείο Ζ στην διαγώνιο ΑΓ έτσι ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι :

1. $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

Μονάδες 8

2. $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4} \cdot \left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} \right)$ και να υπολογίσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ το διάνυσμα \overrightarrow{EB} .

Μονάδες 12

3. τα σημεία Ε, Ζ, Β είναι συνευθειακά.

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία

Κυριακή 11 Οκτωβρίου 2015
Γραπτή δοκιμασία στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Β' Λυκείου

Θέμα Α

A1 Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Να γράψετε τους τύπους του μέτρου, του συντελεστή διεύθυνσης και του μέσου του διανύσματος \overrightarrow{AB} .

A2 Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες:

α. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}(3, -2)$ είναι 13.

β. Αν $AB\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο, τότε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

γ. Ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow D(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

δ. Έστω τρίγωνο ABO . Ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

ε. Αν $\vec{a}(k-1, 2) // \vec{b}(-2, 4)$ τότε $k = 0$.

Μονάδες 25

Θέμα Β

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 5)$, $B(-6, 3)$ και $\Gamma(2, 1)$.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β. Αφού βρείτε το μέσο M της $B\Gamma$, να υπολογίσετε το μήκος της διάμεσου AM .

γ. Να βρεθεί το k ώστε το $\vec{u}(4, k)$ να είναι ομόρροπο με το $\overrightarrow{B\Gamma}$.

Μονάδες 25

Θέμα Γ

Έστω K, A, B, Γ σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $5\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = 8\overrightarrow{K\Gamma}$.

α. Δείξτε ότι τα A, B και Γ είναι συνευθειακά.

β. Αν $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 10$, να υπολογίσετε τα $|\overrightarrow{AB}|$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}|$.

Μονάδες 25

Θέμα Δ

α. Να βρεθεί σημείο M στο επίπεδο τριγώνου ABG τέτοιο ώστε

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MG} = 0$$

β. Να βρεθεί σημείο M στο επίπεδο παραλληλογράμμου $ABGD$ τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}$$

Μονάδες 25

Να απαντήσετε σε ΌΛΑ τα θέματα

Καλή επιτυχία!

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ : Β₃ , Β₅ , Β₆
11/10/2015**

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδειχθεί ότι αν Μ μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα

$$A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2) \text{ τότε } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

(Μονάδες 05)

B. Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $\hat{A} = 60^\circ$ και Ο σημείο τομής ΑΓ και ΒΔ, τότε να συμπληρώσετε με 'Σ' ή 'Λ' για σωστό ή λάθος αντίστοιχα στις παρακάτω προτάσεις:

i. $\vec{AB} - \vec{GB} = 2 \cdot \vec{AO}$

ii. $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{GB} = \vec{0}$

iii. Ισχύει ότι $(\vec{AB}, \vec{BG}) = 60^\circ$

iv. Ισχύει ότι $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{GD}$

(Μονάδες 08)

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{i}$ τότε $|\vec{a}| = \dots\dots\dots$

ii. Αν $\vec{a} = (x, 6)$ και $\vec{\beta} = (2, -4)$ και $\vec{a} // \vec{\beta}$ τότε $x = \dots$

iii. Αν $A(1, -2), B(3, -1), \Gamma(0, 4)$ τότε $\vec{AB} = (\dots, \dots)$

iv. Αν για τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$, τότε $\det(\vec{a}, \vec{a} + \vec{\beta}) = \dots\dots\dots$

v. Αν ισχύει $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \|\vec{a}\| - \|\vec{\beta}\|$ τότε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι $\dots\dots\dots$

vi. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα και ισχύει:
 $k\vec{a} + l\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\dots\dots\dots$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2°

A. Αν για τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ ισχύει $\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 6$ και $|\vec{\delta}| = 8$, τότε:

i. Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα. (Μονάδες 06)

ii. Ναδειχθεί ότι $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\delta} \neq \vec{0}$ (Μονάδες 07)

B. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $A(1, -1)$, $B(4, -5)$ και $K(3, -2)$ το σημείο τομής των διαγωνίων. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ζ, Ε, ώστε $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AZ} = -\frac{1}{3}\vec{AG}$ και $\vec{GE} = \vec{BG}$. Αν $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$ τότε :

i. Να εκφράσετε τα \vec{BG} , \vec{AZ} , \vec{DE} συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 08)

ii. Δείξτε ότι τα σημεία Δ, Ζ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 07)

iii. Αν ισχύει $\kappa \vec{AD} + \lambda \vec{AZ} + \vec{BG} = \vec{0}$, να βρείτε τα κ, λ. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4°

Έστω τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $3\vec{a} + 2\vec{\beta} = (-2, 9)$, $\vec{\beta} = (1 - |\vec{\beta}|, 3)$ και $\vec{\gamma} = (-10, 10)$.

i. Να δείξετε ότι $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-4, 3)$ (Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

iii. Να βρεθεί διάνυσμα \vec{u} με $|\vec{u}| = 1$ αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

Να έχετε επιτυχία!