

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

7-2-2016

ΤΜΗΜΑ: Β₂, Β₈, Ζώνης

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος.

1. Κάθε ευθεία της μορφής $A \cdot x + B \cdot y = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

2. Οι ευθείες $y = 2 \cdot x - 1$ και $y = -2 \cdot x + 4$ σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ ισοσκελές τρίγωνο.

Μονάδες 4

3. Η απόσταση του σημείου $A(2, 1)$ από την ευθεία $y = -3$ είναι 4.

Μονάδες 4

4. Αν $\vec{\alpha} = (-2, 3)$, $\vec{\beta} = (4, -1)$ τότε η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι οξεία.

Μονάδες 4

5. Αν $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\vec{\beta} = \left(x, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

τότε το x είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $(x + y + 1) + \kappa \cdot (x - y - 5) = 0$ (1), με $\kappa \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου κ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Μονάδες 6

2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

Μονάδες 8

3. Να βρείτε την τιμή του κ , για την οποία η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε κάθετη στον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας ε ;

Μονάδες 6

4. Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2 \cdot x + 4$. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας ζ ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

1. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

2. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

B. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 3

2. Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε :

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = -2$.

Μονάδες 6

ii. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 5

iii. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3 \cdot \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται η κορυφή A(1,2) , η εξίσωση του ύψους ΒΔ: $x - 4 \cdot y - 5 = 0$ και η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ: $3 \cdot x + 2 \cdot y + 3 = 0$

1. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

Μονάδες 8

2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ και της κορυφής Β

Μονάδες 10

3. Αν Ε το σημείο τομής των ΓΜ και ΒΔ και οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ είναι $B(-3, -2), \Gamma(3, -6)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ .

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία

Κυριακή 7 Φεβρουαρίου 2016
Γραπτή εξέταση στα
Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β' Λυκείου

Θέμα 1

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

- α. Το σημείο $(-1, 0)$ ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$
- β. Το διάνυσμα $\vec{v}(\alpha, \beta)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\beta x + \alpha y + 2017 = 0$
- γ. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1 y_1 = \rho^2$
- δ. Η ευθεία με εξίσωση $y + 1 = 0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.
- ε. Ο κύκλος με εξίσωση $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ εφάπτεται στους άξονες.

Μονάδες 20

Θέμα 2

Δίνεται σημείο $K(1, 0)$:

- α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το K και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- β. Εξετάστε αν η ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y + 2 = 0$ είναι εφαπτομένη του.
- γ. Αν $x^2 + y^2 = 1$ άλλος κύκλος, να βρείτε τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Ποιά είναι η απόσταση των κέντρων τους;

Μονάδες 25

Θέμα 3

Δίνεται ότι το σημείο $A(2, 0)$ είναι μία κορυφή τετραγώνου και $B\Delta$ η διαγώνιος του, με εξίσωση $2x + y + 1 = 0$.

- α. Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $ΑΓ$.
- β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.
- γ. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Μονάδες 25

Θέμα 4

- A.** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(1,-2)$ και εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$.
- B.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Στη συνέχεια να βρείτε τον συμμετρικό του κύκλου ως προς το σημείο $K(2,3)$.
- Γ.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τις κάθετες ευθείες $ax + by + c = 0$ και $bx - ay + d = 0$ είναι σταθερό, είναι κύκλος.

Μονάδες 35

Να απαντήσετε σε ΌΛΑ τα θέματα

Θέμα BONUS

Γνωρίζουμε ότι από τρία σημεία διέρχεται μοναδικός κύκλος.

Πόσους κύκλους μπορούμε να κατασκευάσουμε που να διέρχονται από δύο σημεία και να είναι εφαπτόμενοι σε μία ευθεία;

Πόσους που να εφάπτονται σε τρεις μη παράλληλες ευθείες;

+10% Μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ : Β₃, Β₅, Β₆
7-2-2016

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- i.** Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A(5,1) και B(5,3) έχει εξίσωση
- ii.** Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A(3,-2) και σχηματίζει γωνία 30° με τον ημιάξονα Ox έχει εξίσωση
- iii.** Αν A(0,1) , B(-1,2) και Γ(4,1) τότε (ΑΒΓ)=.....
- iv.** Η απόσταση των ευθειών $y=2x+3$ και $4x-2y+8=0$ είναι
- v.** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του A(3,-4) είναι
- vi.** Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(3+2\sigma\upsilon\nu\theta, -2+2\eta\mu\theta)$ είναι κύκλος με κέντρο K(...,...) και ακτίνα $\rho=.....$

(Μονάδες: 18)

B) Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ	ΚΕΝΤΡΟ	ΑΚΤΙΝΑ
	(0,0)	2
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$		
	(-3,0)	5
	(0,4)	$\sqrt{2}$
$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$		

(Μονάδες: 07)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): kx+(2-k)y-1=0$, και $(\varepsilon_2): (k-1)x+(k+3)y-14=0$ οι οποίες είναι κάθετες.

- i. Να βρείτε την τιμή του k
- ii. Αν η ευθεία $(\varepsilon_3): \lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε να βρείτε τον αριθμό λ και την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_3)$.

(Μονάδες: 10+15)

ΘΕΜΑ 3°

Έστω η εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει:

α) ευθεία	β) ευθεία παράλληλη με $x x'$
γ) ευθεία παράλληλη με $y y'$	δ) ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$
- ii. Δείξτε ότι οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.
- iii. Βρείτε την ευθεία της παραπάνω οικογένειας ευθειών που σχηματίζει γωνία 45° με τον Ox , καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει τους άξονες $x x'$ και $y y'$.

(Μονάδες: 8+10+7)

ΘΕΜΑ 4°

Έστω ο κύκλος (C) που διέρχεται από τα σημεία $A(2,-2)$, $B(-4,6)$ και $\Gamma(3,5)$.

- i. Να δείξετε ότι ο κύκλος έχει κέντρο $K(-1,2)$ και ακτίνα $\rho=5$.
- ii. Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του $A(2,-2)$.
- iii. Βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το $\Delta(4,12)$.
- iv. Να βρείτε σημείο M του κύκλου έτσι ώστε $M\hat{B}\Gamma = 90^\circ$.

(Μονάδες: 8+6+6+5)

Να έχετε επιτυχία!