ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
30/11/2014
ΤΜΗΜΑ : B_4 , B_5 , B_{10}

ΘΕΜΑ 1ο

a) Να αποδειχθεί ότι αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ορίζονται συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

(Μονάδες 09)

b) Να συμπληρώσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν $\vec{\alpha} = 4\vec{j} - 3\vec{i}$ τότε $\vec{\alpha} = (4,-3)$.

ii. Αν $\vec{\alpha} = (3,2)$ και $\vec{\beta} = (-4,5)$ τότε η γωνία τους είναι αμβλεία.

iii. Αν $\vec{\alpha} = (x,8)$ και $\vec{\beta} = (2,x)$ και $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε x=-4.

iv. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και ισχύει $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$.

v. Αν Μ(5,-3) μέσο ΑΒ και Α(-2,6) τότε Β(12,-12).

vi. Για οποιαδήποτε $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\alpha} = \left|\vec{\alpha}\right|^2 \cdot \vec{\beta}$.

vii. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right|$ τότε $\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right| = \left|\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right|$.

viii. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και ισχύει $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = 0$ τότε $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 16)

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \left(-2, 9\right)$, $\vec{\beta} = \left(1 - \left|\vec{\beta}\right|, 3\right)$.

i. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \left(2,1\right)$ και $\vec{\beta} = \left(-4,3\right)$. (Μονάδες 07)

ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \left(-10,10\right)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
(Μονάδες 08)

iii. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\delta} = \left(1,8\right)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο ισχύουν: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

i. Αν δίνονται τα σημεία Δ, Ε, Ζ έτσι ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{B\Gamma}$ τότε να δείξετε ότι Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

ii. Αν ισχύει $\kappa \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$, να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 05)

iii. Να δείξετε ότι ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 06)

iv. Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου , τότε να βρείτε την γωνία των $\overrightarrow{AM}$ και $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 4$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$.

i. Να δείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 2\sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. (Μονάδες 08)

ii. Αν $\vec{v} = 8 \cdot \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{\gamma}$, να δείξετε ότι $\vec{v} \perp \vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

iii. Αν για διάνυσμα $\vec{\delta}$ ισχύει $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\delta}$, τότε να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = 2$ και να υπολογίσετε το $|\vec{\delta}|$. (Μονάδες 10)

Να έχετε επιτυχία!