

Διαγώνισμα Μαθηματικών

Α' Λυκείου

6/10/19

Θέμα 1^ο (20 μονάδες)

A. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{(xy^{-2})^3 \cdot (x^2y)^{-1}}{(y^{-1})^7 \cdot (-y)}$, για $x=2019$ και $y = -\frac{1}{2019}$

B. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\frac{a^3 + \beta^3}{a + \beta} - a\beta$ **β.** $\left(\frac{a + \beta}{a - \beta}\right)^{-1} \cdot \frac{a^2 - \beta^2}{a^{-1} - \beta^{-1}}$

Θέμα 2^ο (25 μονάδες)

Αν $1 \leq a \leq 2$ και $3 \leq \beta \leq 4$, μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $a + \beta$ **β.** $a^2 - \beta^2$ **γ.** $\frac{\beta}{a}$ **δ.** $2a^2 - 3a\beta$

Θέμα 3^ο (25 μονάδες)

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2} = \kappa - \lambda - 1$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ .

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda \leq \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1} \leq \kappa$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

γ. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{\beta}{\beta^2 + 1} \leq 1$. (Χρησιμοποιήστε το ερώτημα β.)

Θέμα 4^ο (30 μονάδες)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $B\Delta = \Gamma E$ και έστω M το μέσο της ΔE .

α. Να αποδείξετε ότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

γ. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά ίσα τμήματα ΔZ και $E H$. Να αποδείξετε ότι $BZ = \Gamma H$.

Καλή Επιτυχία

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Τμήματα: Α₃, Α₄, Α₇
Διδάσκων: Ν. Ξεπαπαδάκης

06/10/2019

ΘΕΜΑ Α :

A.1. Να αποδείξετε ότι $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$

(Μονάδες 8)

A.2. Να δείξετε ότι αν δυο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

(Μονάδες 7)

A.3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ισχύει η ισοδυναμία $α^2 + β^2 = 0 \Leftrightarrow |α| + |β| = 0$.

ii. Αν $\frac{α}{β} < 1$, τότε θα ισχύει ότι $\frac{β}{α} > 1$.

iii. Δυο τρίγωνα που έχουν ίσες περιμέτρους είναι ίσα.

iv. Ισχύει ότι $4^8 + 4^8 + 4^8 + 4^8 = 4^9$.

v. Αν οι χορδές δυο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΑΖ και ΑΕ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΕ = ΑΖ$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, Η το σημείο τομής των τμημάτων ΕΜ και ΑΒ και Θ το σημείο τομής των τμημάτων ΖΜ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΓΖΜ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

ii. Τα τρίγωνα ΗΑΕ και ΘΑΖ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

iii. Το τρίγωνο ΗΘΜ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Τμήματα: Α₃, Α₄, Α₇
Διδάσκων: Ν. Ξεπαπαδάκης

06/10/2019

ΘΕΜΑ Γ :

Γ.1. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$, για $\alpha \neq \beta$.

(Μονάδες 10)

Γ.2. Αν ισχύει ότι $|\alpha - \beta + 3| = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = \beta - 6.$$

(Μονάδες 10)

Γ.3. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$|\alpha - 2| + |\alpha + 3| > 0.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ :

Δ.1. Αν α, β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

(Μονάδες 5)

Δ.2. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x^4 - x^3 + 11x^2 - 11x}{x^3 - x}$$

I. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 4)

II. Να αποδείξετε ότι $A = \frac{x^2 + 11}{x + 1}$.

(Μονάδες 9)

III. Αν $x \in (2, 4)$, να αποδείξετε ότι $A \in (3, 9)$.

(Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ !