

Διαγώνισμα Μαθηματικών

Α' Λυκείου

1/12/19

Θέμα Α (20 μονάδες)

A1. Να αποδείξετε ότι : $|a+b| \leq |a|+|b|$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, ως Σωστές ή Λανθασμένες.

α. Αν a, b πραγματικοί αριθμοί, τότε: $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

β. Αν x πραγματικός αριθμός, τότε: $|x-1|=|1-x|$.

γ. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ όπου n, m θετικοί ακέραιοι και $a > 0$.

δ. Αν $a \leq 0$ και n θετικός ακέραιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{a^n} = a$.

ε. Αν $a \geq 0$, τότε η \sqrt{a} παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$

στ. Υπάρχει τιμή του λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda-1)x = \lambda-2$, να είναι ταυτότητα.

Θέμα Β (25 μονάδες)

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt[3]{8-\sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{7}$ και $B = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[15]{2^2}$.

Να αποδειχθεί ότι:

B1. $A = 7$

B2. $B = 2$

B3. $\frac{5}{\sqrt{A+\sqrt{B}}} + \frac{5}{\sqrt{A-\sqrt{B}}} = 2\sqrt{7}$

Θέμα Γ (25 μονάδες)

Έστω ρ η κοινή ρίζα των εξισώσεων $|2|x|-3|-1=0$, (1) και $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{|2x-3|} = 1$, (2)

Γ1. Να βρείτε τον αριθμό ρ .

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2\rho| = 2x-\rho$

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση $\lambda^4(x-\lambda) = \rho(x-1)$, (3) είναι ταυτότητα.

Θέμα Δ (30 μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, και η διχοτόμος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε την AB , προς το μέρος του B , κατά τμήμα BE , ώστε $AE = A\Gamma$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\Delta B < \Delta \Gamma$.

Δ3. Αν η προέκταση της $E\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι $AB = AZ$.

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται κύκλος (O, R) , οι ίσες χορδές του $AB\Gamma\Delta$ και τα αποστήματά τους OK, OL αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των BA και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:

1. Τα τρίγωνα MOK και MOL είναι ίσα
(Μονάδες 15)
2. $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις (χωρίς αιτιολόγηση):

1. Δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
2. Το άθροισμα δυο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .
3. Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη της διαφοράς των άλλων δυο πλευρών και μεγαλύτερη του αθροίσματος.
4. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει, $|\alpha|^3 = \alpha^3$
5. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$
6. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\sqrt[8]{\alpha^6} = \sqrt[4]{\alpha^3}$
7. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha - \beta| = -|\beta - \alpha|$
8. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \alpha - 3$
9. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$
10. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ Γ

1. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |x + 2| + |1 - x|$$

(Μονάδες 10)

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{1}{x^2 + x}$$

και

$$|2 + |x + 3|| = 3$$

(Μονάδες 8 + 7)

ΘΕΜΑ Δ

1. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση

$$\lambda^2 (x - 1) = 2(2x - \lambda), \text{ με } \lambda \in R$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση έχει:

- I. Μοναδική λύση
- II. Έχει τουλάχιστον μια λύση
- III. Είναι αδύνατη στο R

(Μονάδες 15)

2. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 5\beta^2, \text{ για } \alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ και } \beta = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

(Μονάδες 10)