

Διαγώνισμα Μαθηματικών

Α' Λυκείου

6/10/18

Θέμα 1^ο (5 μονάδες)

Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$, για τους οποίους ισχύει: $\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{(\alpha^3\beta^{-2})^4\beta^{-12}}{(\alpha\beta)^{-1}(-\alpha)^{32}}$.

γ. Αν επιπλέον ισχύει $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 + \beta^2$

Θέμα 2^ο (5 μονάδες)

Αν $1 \leq \alpha \leq 2$ και $3 \leq \beta \leq 4$, μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $\alpha + \beta$ β. $\alpha^2 - \beta^2$ γ. $\frac{\beta}{\alpha}$ δ. $2\alpha^2 - 3\alpha\beta$

Θέμα 3^ο (5 μονάδες)

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2} = \kappa - \lambda - 1$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ .

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \kappa$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

γ. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{\beta}{\beta^2 + 1} \leq 1$. (Χρησιμοποιήστε το ερώτημα β.)

Θέμα 4^ο (5 μονάδες)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $B\Delta = \Gamma E$ και έστω M το μέσο της ΔE .

α. Να αποδείξετε ότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

γ. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά ίσα τμήματα ΔZ και $E H$. Να αποδείξετε ότι $BZ = \Gamma H$.

Καλή Επιτυχία