Γ. ΓΚΑΝΕΤΣΟΣ Κ. ΤΖΟΥΜΗ

ΦΥΣΙΚΗ

ΤΟΜΟΣ 1

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μία προσπάθεια για τη βοήθεια, στο μάθημα της Φυσικής, όλων των μαθητών που έχουν στόχο την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Επιδίωξη είναι να δοθεί με σαφήνεια και μέθοδο η δυνατότητα στα παιδιά να καταλάβουν και κυρίως να αγαπήσουν τη Φυσική, έτσι ώστε η κατανόηση των εννοιών να είναι εποικοδομητική και ταυτόχρονα να τους δίνει την ικανοποίηση της ερμηνείας των φαινομένων της καθημερινότητάς τους, αλλά και του μικρόκοσμου και μακρόκοσμου ταυτόχρονα.

Περιέχει:

- ✓ Αναλυτικά γραμμένη τη θεωρία
- ✓ Μεθοδολογία
- ✓ Λυμένες ασκήσεις
- ✓ Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής(με και χωρίς αιτιολόγηση)
- ✓ Ερωτήσεις σωστού-λάθους(με και χωρίς αιτιολόγηση)
- ✓ Ασκήσεις για λύση, με τις απαντήσεις τους
- ✓ Διαγωνίσματα στο τέλος κάθε κεφαλαίου

Αθήνα, Ιούνιος 2015,

Οι συγγραφείς.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Ταλαντώσεις

1.1. Απλές αρμονικές ταλαντώσεις

1.1.1. Θεωρία – Μεθοδολογία ασκήσεων

Περιοδικά φαινόμενα

Ένα φαινόμενο λέγεται περιοδικό όταν επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα (τακτά) χρονικά διαστήματα.
Παράδειγμα περιοδικής κίνησης είναι η κίνηση της γης γύρω από τον ήλιο σε χρονικό διάστημα 365 ημερών.
Επίσης περιοδική κίνηση είναι αυτή του ωροδείκτη του ρολογιού που επαναλαμβάνεται ανά 12 ώρες.

Χαρακτηριστικά μεγέθη περιοδικών φαινομένων

- Περίοδος
  Περίοδος (T) είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του περιοδικού φαινομένου.
  Μονάδα μέτρησης στο S.I. είναι το $1s$.
- Συχνότητα
  Συχνότητα (f) είναι το πηλίκο του αριθμού των επαναλήψεων του φαινομένου προς τη μονάδα του χρόνου.
  Δηλαδή: $f = \frac{N}{t}$.
  Μονάδα μέτρησης συχνότητας στο S.I. είναι το 1Hz.

➢ Σχέση συχνότητας – περιόδου
  Για να γίνει μία επανάληψη του περιοδικού φαινομένου (N=1) απαιτείται χρόνος μιας περιόδου (t=T) οπότε:

$$f = \frac{N}{t} \xrightarrow[t=T]{N=1} f = \frac{1}{T}$$

- Γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα
  Η γωνιακή (ή κυκλική) συχνότητα ω είναι ένα βοηθητικό μέγεθος που χρησιμοποιείται μόνο για την απλούστευση της γραφής των εξισώσεων. Δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων σε χρονικό διάστημα $2\pi\ s$.

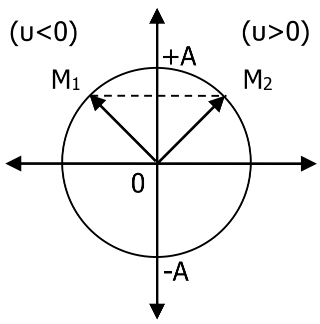
$$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_0\right) \Rightarrow$$

Πρέπει ακόμη $\upsilon < 0$: $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\phi_0 = 4\pi/3]{t=0} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{3} \rightarrow \upsilon < 0 \\ \xrightarrow[\phi_0 = 5\pi/3]{t=0} \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{3} \rightarrow \upsilon > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ \phi_0 = \dfrac{4\pi}{3} \end{array}$

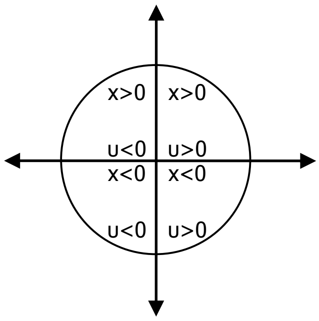
Τρόπος υπολογισμού της αρχικής φάσης με την μέθοδο των στρεφόμενων διανυσμάτων

Όπως διαπιστώσαμε από τα προηγούμενα παραδείγματα η χρήση των τριγωνομετρικών εξισώσεων παρουσιάζει μαθηματικές δυσκολίες και απαιτεί πάντα διερεύνηση.

Η μέθοδος των στρεφομένων διανυσμάτων είναι πολύ πιο απλή. Για κάθε θέση του απλού αρμονικού ταλαντωτή καθορίζουμε μία θέση του στρεφόμενου διανύσματος. Χρειάζεται να γνωρίζουμε την απομάκρυνση και τη φορά κίνησης του ταλαντωτή, δηλαδή την φορά της ταχύτητας. Αν γνωρίζουμε μόνο τη θέση τότε ορίζονται δύο θέσεις του στρεφόμενου διανύσματος που αντιστοιχούν σε αντίθετες φορές κίνησης. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα πρόσημα των x, υ, α σε κάθε τεταρτημόριο του κύκλου.



Η εξίσωση κίνησης του στρεφόμενου διανύσματος είναι: $\boxed{\phi = \omega t}$.

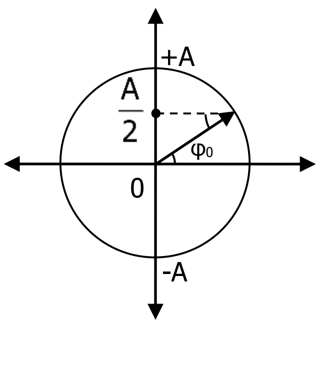


Ορισμός στρεφόμενου διανύσματος

Το διάνυσμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, αντίθετα των δεικτών του ρολογιού, έχει μέτρο (μήκος) ίσο με A και η προβολή του κάθε χρονική στιγμή στον κατακόρυφο άξονα ισούται με x.

Θα υπολογίσουμε τώρα την αρχική φάση για τις προηγούμενες περιπτώσεις 4.2 και 4.3.

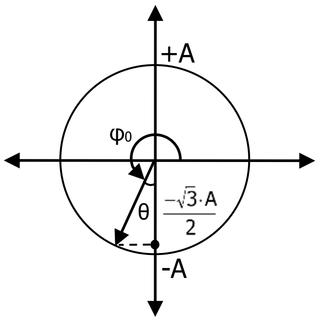
4.2 $\underline{t = 0}$, $\underline{x = \dfrac{A}{2}}$, $\underline{\upsilon > 0}$



Επειδή $x > 0$, $\upsilon > 0$ είμαστε στο 1^{o} τεταρτημόριο.

$$\eta\mu\phi_0 = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6}$$

4.3 $\underline{t=0,}$ $\underline{x=\frac{-A\sqrt{3}}{2}},$ $\underline{\upsilon<0}$



Επειδή $x\langle 0,\ \ \upsilon\langle 0$ είμαστε στο 3[ο] τεταρτημόριο.

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\left|\frac{-\mathrm{A}\sqrt{3}}{\mathrm{A}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\overset{0<\theta<\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow}\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

Άρα $\phi_0=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\phi_0=\frac{4\pi}{3}$

5. Προσδιορισμός χρονικής στιγμής

Παράδειγμα:

Έστω $x=A\eta\mu\frac{\pi}{4}t$. Να προσδιορισθεί η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα κινείται κατά την αρνητική φορά και έχει απομάκρυνση $x=\frac{A}{2}$ για δεύτερη φορά.

α. <u>Τριγωνομετρική λύση</u>

$$x=A\eta\mu\frac{\pi}{4}t\ \Rightarrow\frac{A}{2}=A\eta\mu\frac{\pi}{4}t\ \Rightarrow\eta\mu\frac{\pi}{4}t=\frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{\pi}{4}t=\eta\mu\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}t=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} & (1)\\ \frac{\pi}{4}t=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} & (2)\end{cases}$$

$$\upsilon=\upsilon_{\max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}t\ \Rightarrow$$

Πρέπει $\upsilon\langle 0$:
$$\begin{cases}(1)\rightarrow\upsilon=\upsilon_{\max}\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow\upsilon\rangle 0\\ (2)\rightarrow\upsilon=\upsilon_{\max}\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow\upsilon\langle 0\end{cases}$$

Δεκτή η 2η ομάδα λύσεων.

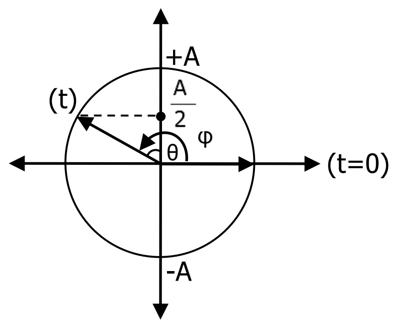
Για να βρούμε την τιμή του κ λύνουμε την εξίσωση ως προς t και απαιτούμε $t \rangle 0$.

Είναι: $\frac{\pi}{4}t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t = 8\kappa + \frac{10}{3} \\ t \rangle 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8\kappa + \frac{10}{3} \rangle 0 \Rightarrow \kappa \rangle -\frac{5}{12}$

Αλλά $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Για τη χρονική στιγμή που είναι $x = \frac{A}{2}$ για πρώτη φορά $\kappa = 0$ δηλαδή $t = \frac{10}{3}\sec$, για δεύτερη φορά $\kappa = 1$ δηλαδή $t = \frac{34}{3}\sec$, κοκ.

β. Διανυσματική λύση



Επειδή $x > 0$, $\upsilon < 0$ βρισκόμαστε στο 2ο τεταρτημόριο.

$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Άρα το διάνυσμα στράφηκε κατά γωνία $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Όμως $\varphi = \omega t \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4}t \Rightarrow t = \frac{10}{3}\sec$ (πρώτη φορά)

Για τον υπολογισμό του χρόνου που απαιτείται για να ισχύουν τα παραπάνω για 2η φορά προσθέτουμε στον χρόνο t τον χρόνο μιας περιόδου.

Επειδή $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi/4} \Rightarrow T = 8\sec$. Άρα: $t = \frac{10}{3} + 8 \Rightarrow t = \frac{34}{3}\sec$.

- **Δηλαδή για τον υπολογισμό χρονικής στιγμής (γενικότερα χρονικού διαστήματος) καθορίζουμε την αρχική και τελική θέση του περιστρεφόμενου διανύσματος και υπολογίζουμε τη διαγραφόμενη γωνία.**

6. Μετατόπιση και διάστημα

Αν ένα σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ. τη χρονική στιγμή t_1 έχει απομάκρυνση x_1 από τη Θ.Ι. και τη χρονική στιγμή t_2 η απομάκρυνση του είναι x_2 από τη Θ.Ι. η μετατόπιση

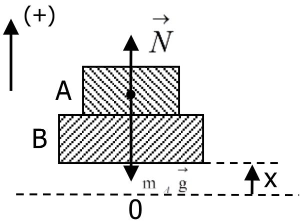
Κίνηση σώματος με επαφή με άλλο ταλαντούμενο σώμα.

Μεθοδολογία

Όταν κάποιο σώμα A ,μάζας m_A ,βρίσκεται πάνω ή δίπλα σε σώμα B , μάζας m_B που εκτελεί Α.Α.Τ. και ζητείται να προσδιοριστεί κάποιο μέγεθος ώστε να χάνεται ή να μην χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Σχεδιάζουμε το σύστημα σε μία τυχαία θέση.
- Σημειώνουμε τις δυνάμεις στο σώμα A.
- Γράφουμε για το σώμα A τη συνθήκη: $\Sigma F=-D_A.x \Rightarrow \Sigma F=-m_A\omega^2 x$.

I. Ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση:



$$\Sigma F=-m_A\omega^2 x \Rightarrow N-m_A g=-m_A\omega^2 x \Rightarrow$$

$$N=m_A g-m_A\omega^2 x \Rightarrow N=m_A\left(g-\omega^2 x\right) \ (1)$$

(1): όταν $x=+A \rightarrow N=N_{\min}$

όταν $x=-A \rightarrow N=N_{\max}$

Όταν ζητείται να μην χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων έχουμε: $N_{\min} \geq 0 \xrightarrow{(1)} m_A\left(g-\omega^2.\mathrm{A}\right) \geq 0 \rightarrow \boxed{g \geq \omega^2 A}$.

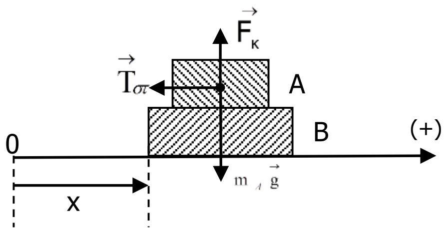
Από τη σχέση αυτή υπολογίζεται η οριακή τιμή κάποιου από τα μεγέθη ω, T, f ή A .

Π.χ. $A \leq \dfrac{g}{\omega^2} \Rightarrow \boxed{A_{\max}=\dfrac{g}{\omega^2}}$.

✓ *Είναι προφανές ότι η επαφή χάνεται πάνω από τη θέση ισορροπίας.*

II. Ταλάντωση σε οριζόντια διεύθυνση:

α. *Το A πάνω στο B*



$$\Sigma F=-m_A\omega^2 x \Rightarrow -T_{\sigma\tau}=-m_A\omega^2 x \Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau}=m_A\omega^2 x \ (2)$$

Όταν ζητείται το σώμα A να μην ολισθαίνει πάνω στο σώμα B , η $T_{\sigma\tau}$ είναι η στατική τριβή. Τότε ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu.F\kappa \xrightarrow{(2)} m_A\omega^2 x \leq \mu.F\kappa \rightarrow$$

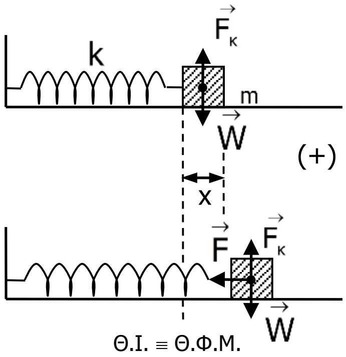
$$m_A\omega^2 x \leq \mu m_A g \rightarrow \omega^2 x \leq \mu g \xrightarrow{x=A} \omega^2 A \leq \mu g$$

Από τη σχέση αυτή υπολογίζουμε την οριακή τιμή κάποιου από τα μεγέθη ω, T, f ,μ ή A.

Λυμένες ασκήσεις

Τα επόμενα τρία (3) συστήματα να αποδείξετε ότι εκτελούν Α.Α.Τ. και να υπολογίσετε την περίοδό τους.

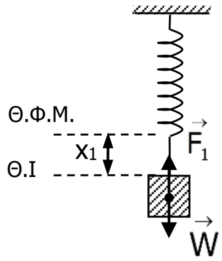
1. Σύστημα μάζας – ελατηρίου σε οριζόντιο λείο επίπεδο.



Το σύστημα έχει εκτραπεί κατά x από την Θ.Ι. Υπολογίζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων στην τυχαία θέση x και έχουμε:

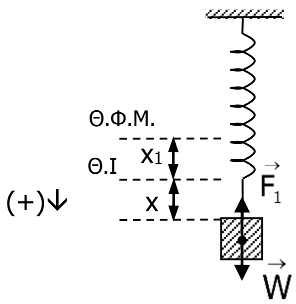
$$\Sigma F = -F = -kx \Rightarrow \left.\begin{matrix}\Sigma F = -kx \\ \Sigma F = -Dx\end{matrix}\right\} \Rightarrow D = k \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2. Σύστημα μάζας – ελατηρίου σε κατακόρυφη διάταξη.



Στη θέση ισορροπίας ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow W - F_1 = 0 \Rightarrow$
$W - kx_1 = 0$ (1)

Εκτρέπουμε το σύστημα κατά x από τη Θ.Ι. και στην τυχαία θέση υπολογίζουμε τη δύναμη επαναφοράς του συστήματος:



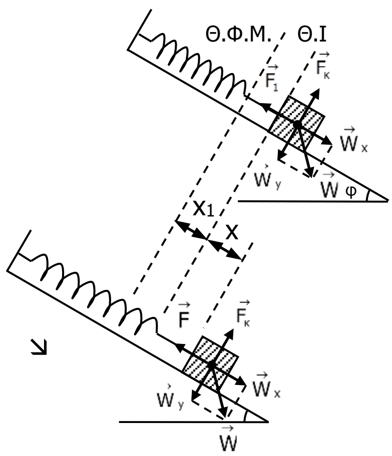
$$\Sigma F = W - F = W - k\left(x_1 + x\right) = w - kx_1 - kx \xrightarrow{(1)}$$

$$\left.\begin{matrix}\Sigma F = -kx \\ \Sigma F = -Dx\end{matrix}\right\} \Rightarrow D = k \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3. Σύστημα μάζας – ελατήριο σε πλάγιο λείο επίπεδο.

Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow W_x - F_1 = 0 \Rightarrow W_x - kx_1 = 0 \quad (2)$$



Δ. Η αρχική τιμή του πλάτους της ταλάντωσης είναι $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερη από την τελική τιμή του πλάτους.

- Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1.1.4. Ασκήσεις για λύση

Απλή αρμονική ταλάντωση

1. Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. Να αποδείξετε: $a = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}$.

2. Υλικό σημείο εκτελεί Α.Α.Τ και η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας του δίνεται από την εξίσωση: $x = A\eta\mu\left(\omega t + \phi_0\right)$.

   Α. Να υπολογίσετε τις τιμές των μεγεθών $A,\ \omega,\ \phi_0$ αν γνωρίσετε ότι η απόσταση των ακραίων θέσεων του υλικού σημείου είναι $d = 0,4m$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x = 0,1m$ και $\upsilon = \sqrt{3}\, m/s$.

   Β. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{10} s$ την επιτάχυνση του υλικού σημείου.

   Γ. Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο αν η μάζα του είναι $m = 2kg$.

Απαντήσεις

Α. $A = 0,2m$, $\omega = 10\, rad/s$, $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$

Β. $a = 10\, m/s^2$

Γ. $F = -200x$ (S.I)

3. Υλικό σημείο εκτελεί Α.Α.Τ με μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{max} = 0,4\, m/s$ και μέγιστη επιτάχυνση $a_{max} = 4\, m/s^2$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon = 0,2\, m/s$ και η απομάκρυνση του αρνητική. Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

1.6.2. Ταλαντώσεις - 2ο Κριτήριο αξιολόγησης

1ο Θέμα

Στις ερωτήσεις 1-4 να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1) Ηλεκτρικό κύκλωμα LC ,αμελητέας ωμικής αντίστασης εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με περίοδο T. Αν το φορτίο του οπλισμού αναφοράς του πυκνωτή μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση q = Qημωt, τότε η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου έχει τη μέγιστη τιμή της για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή:

α. t =0

β. $t = \frac{T}{4}$

γ. $t = \frac{T}{2}$

δ. t = T (5 Μονάδες)

2) Όταν ένας ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση τότε η περίοδός του:

α. μειώνεται εκθετικά με το χρόνο

β. μειώνεται γραμμικά με το χρόνο

γ. μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο

δ. παραμένει σταθερή (5 Μονάδες)

3) Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση $x = 2\,ημ(\pi t + \frac{\pi}{3})$ (S.I.)

α. Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με 2 cm

β. Η συχνότητα της ταλάντωσης ισούται με π Hz.

γ. Τη χρονική στιγμή t = 0 η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν.

δ. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{6}s$ η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν. (5 Μονάδες)

4) Η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή ελατηρίου – σώματος μάζας m ,εξαρτάται:

α. Από τη μάζα του σώματος

β. Από τη συχνότητα της περιοδικής εξωτερικής δύναμης

γ. Από το πλάτος της εξωτερικής περιοδικής δύναμης

δ. Από τη σταθερά του ελατηρίου. (5 Μονάδες)

5) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λανθασμένες:

α. Στην απλή αρμονική ταλάντωση η συχνότητα εξαρτάται από το πλάτος.

Κεφάλαιο 2

Κύματα

2.1. Μηχανικά κύματα

2.1.1. Θεωρία – Μεθοδολογία ασκήσεων

Εισαγωγή

Κύμα ονομάζεται η διάδοση μιας διαταραχής με ορισμένη ταχύτητα κατά την οποία μεταφέρεται ενέργεια και ορμή χωρίς μεταφορά μάζας (ύλης).

Ο όρος διαταραχή είναι γενικός και σημαίνει τη μεταβολή οποιουδήποτε φυσικού μεγέθους. Π.χ. στα μηχανικά κύματα σημαίνει την απομάκρυνση των μορίων της χορδής από τη θέση ισορροπίας τους, στα ηχητικά κύματα εκφράζει μεταβολή της πίεσης ή της πυκνότητας του αέρα και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα εκφράζει τη μεταβολή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

Είδη κυμάτων

I.Ανάλογα με τη μορφή της ενέργειας που μεταφέρουν διακρίνονται σε:

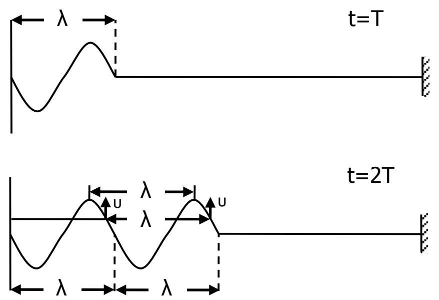
Μηχανικά κύματα

Αυτά μεταφέρουν μηχανική ενέργεια και διαδίδονται σε υλικά σώματα που μπορούν να δέχονται και να μεταβιβάζουν ελαστικές παραμορφώσεις (π.χ. σεισμικά κύματα, ηχητικά).

Παρατήρηση:

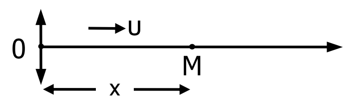
Ένα μέσο λέγεται ελαστικό όταν:

i) Είναι συνεχές, δηλαδή αποτελείται από όμοια στοιχειώδη σωματίδια.
ii) Είναι ισότροπο, δηλαδή έχει τις ίδιες ιδιότητες προς όλες τις κατευθύνσεις.



Μαθηματική περιγραφή αρμονικού κύματος

Έστω ότι το σημείο O ($x=0$: πηγή του κύματος) εκτελεί Α.Α.Τ που περιγράφεται από την εξίσωση: $y_{(O)}=A.\eta\mu\omega t$.



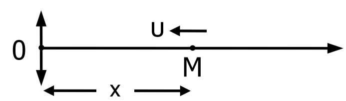
Τότε κατά μήκος του μονοδιάστατου ελαστικού μέσου διαδίδεται αρμονικό κύμα με ταχύτητα υ.

Η διαταραχή φτάνει στο τυχαίο σημείο M τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{x}{\upsilon}$. Άρα το σημείο M τη χρονική στιγμή $t\left(t>t_1\right)$ ταλαντώνεται για χρονικό διάστημα $\Delta t=t-t_1$. Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου M δίνεται από τη σχέση:

$$y=A.\eta\mu\omega\left(t-t_1\right)\Leftrightarrow y=A.\eta\mu\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right)\Leftrightarrow y=A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\upsilon.T}\right)\Leftrightarrow$$

$$\boxed{y=A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την εξίσωση ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση.



Αν το κύμα διαδίδεται από το σημείο M προς το σημείο O (κατά την αρνητική κατεύθυνση) τότε το σημείο M ταλαντώνεται για περισσότερο χρόνο από το O. Αν η εξίσωση ταλάντωσης του O είναι: $y_{(0)}=A\eta\mu\omega t$ τότε η εξίσωση ταλάντωσης του M είναι:

$$y=A\eta\mu\left(\omega t+\frac{x}{\upsilon}\right)\rightarrow y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right).$$

Διαφορετική μορφή της γενικής εξίσωσης του αρμονικού κύματος

Α. Διάδοση κατά τη θετική κατεύθυνση

$$x_0 = \frac{\lambda.\phi_0}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{\phi_0}{2\pi} = \frac{x_0}{\lambda}.$$

Άρα: $\boxed{y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{x_0}{\lambda}\right)}$

Β. Διάδοση κατά την αρνητική κατεύθυνση

$$x_0 = -\frac{\lambda.\phi_0}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{\phi_0}{2\pi} = -\frac{x_0}{\lambda}.$$

Άρα: $\boxed{y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} - \frac{x_0}{\lambda}\right)}$

➢ Σχεδιασμός στιγμιοτύπων κύματος

1. Έστω αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση και περιγράφεται από την εξίσωση: $y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα κύματος τις χρονικές στιγμές $t = \frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$, T, $\frac{5T}{4}$ στο θετικό ημιάξονα Ox.

Απάντηση

- Αντικαθιστούμε τη δεδομένη χρονική στιγμή στην εξίσωση κύματος $t = \frac{T}{2}$:

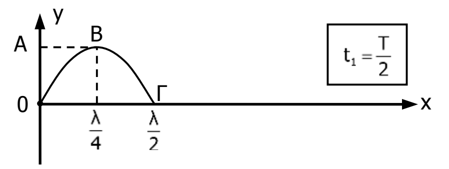
$$y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{T/2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

- Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ταλάντωσης των μορίων: $\phi \geq 0 \Leftrightarrow 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\lambda}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{\lambda}{2}$. Μπορούμε απλούστερα να μηδενίζουμε τη φάση οπότε βρίσκουμε τη θέση του τελευταίου σημείου που ταλαντώνεται. $\left(\phi = 0 \rightarrow x = \frac{\lambda}{2}\right)$.
- Θέτουμε στη σχέση $y = f(x)$ τις τιμές:

$$x = 0 : y = A.\eta\mu 2\pi.\frac{1}{2} = A.\eta\mu\pi \Rightarrow y = 0$$

$$x = \frac{\lambda}{4} : y = A.\eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = A\eta\mu 2\pi\frac{1}{4} = A\eta\mu\frac{\pi}{2} \rightarrow y = A.$$

- Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2}$.



✓ Θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο με απλούστερο τρόπο ξεκινώντας από το τελευταίο σημείο. Αφού $\phi_{(\Gamma)} = 0 \Leftrightarrow y_{(\Gamma)} = 0$.

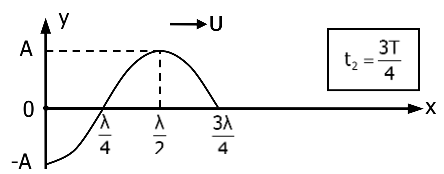
Για το σημείο B : $\Delta\phi_{B\Gamma} = \frac{2\pi}{\lambda}.\Delta x_{B\Gamma} \Leftrightarrow \phi_{(B)} - \cancel{\phi_{(\Gamma)}} = \frac{2\pi}{\lambda}.\frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \phi_{(B)} = \frac{\pi}{2}$ και συνεπώς

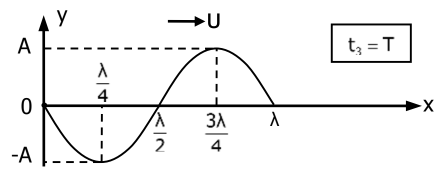
$y_{(B)} = A.\eta\mu\phi_{(B)} = A.\eta\mu\frac{\pi}{2} = A$.

Για το σχεδιασμό των άλλων στιγμιοτύπων δεν επαναλαμβάνουμε την παραπάνω αναλυτική διαδικασία αλλά υπολογίζουμε πόσο μετατοπίζεται η κυματομορφή σε σχέση με την αρχική χρονική στιγμή.

$t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{T}{2} + \frac{T}{4} = t_1 + \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$

$\Delta x = \upsilon\Delta t = \frac{\upsilon.T}{4} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4}$. Δηλαδή η κυματομορφή έχει μετατοπισθεί προς τη θετική κατεύθυνση κατά $\frac{\lambda}{4}$ άρα μέχρι τη θέση $x = \frac{3\lambda}{4}$





Λυμένες ασκήσεις

1. Η εξίσωση ενός γραμμικού αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος μίας χορδής Ox είναι: $y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2t - 5x\right)$ (S.I). Να βρεθούν:

   Α. Το πλάτος, η συχνότητα, το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

   Β. Η εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου Σ της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = 1m$.

   Γ. Η ταχύτητα του σημείου Σ όταν η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του είναι: $y = 0,1m$.

   Δ. Η επιτάχυνση του σημείου Σ τη χρονική στιγμή $t = \frac{21}{8}s$. $\left(\pi^2 = 10\right)$.

Λύση

Α.
$$\left.\begin{array}{l} y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2t-5x\right) \\ y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{A = 0,2m}, T = \frac{1}{2}s \Rightarrow \boxed{f = 2Hz}, \boxed{\lambda = \frac{1}{5} = 0,2m}$$
$$\boxed{\upsilon = \lambda . f = 0,4 m/s}$$

Β. Το σημείο Σ ταλαντώνεται αν

$\phi_{(\Sigma)} \ge 0 \Leftrightarrow 2\pi\left(2t-5\right) \ge 0 \Leftrightarrow 2t - 5 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 2,5s$.

Θέτουμε $x = 1m$: $\boxed{y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2t-5\right)\ \left(\text{S.I}\right) \text{όπου } t \ge 2,5s}$

Παρατήρηση:

Όταν ζητείται η εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου του μέσου συναρτήσει του χρόνου θα γράφουμε οπωσδήποτε και τις δυνατές τιμές του χρόνου (πεδίο ορισμού της μεταβολής t)

Γ. Όταν δίνεται η απομάκρυνση ενός σημείου και ζητείται η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου προτιμάμε την ενεργειακή λύση.

$$\text{Α.Δ.Ε.Τ}: K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Leftrightarrow V = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow$$

$$V = \pm 4\pi\sqrt{\left(0,2\right)^2 - \left(0,1\right)^2} = \pm 4\pi\sqrt{0,04 - 0,01} = \pm 4\pi\sqrt{0,03} = \pm 4\pi\sqrt{3.10^{-2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \pm 0,4\pi\sqrt{3}\, m/s}$$

✓ Θα μπορούσαμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $y = f\left(x,t\right)$ και $V = f\left(x,t\right)$ ως εξής:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(2t - 5x\right) \overset{y=0,1m}{\Rightarrow} \eta\mu 2\pi\left(2t - 5x\right) = \frac{1}{2}$$

2.1.2. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Οδηγία:

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

1. Κατά τη διάδοση ενός μηχανικού κύματος σε ένα ελαστικό μέσο:
   α. μεταφέρεται ενέργεια και ύλη
   β. μεταφέρεται μόνο ύλη
   γ. μεταφέρεται ενέργεια και ορμή από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο
   δ. όλα τα σημεία του μέσου την ίδια χρονική στιγμή έχουν την ίδια φάση

2. Όταν ένα περιοδικό κύμα αλλάζει μέσο διάδοσης:
   α. η ταχύτητα του μένει σταθερή
   β. η συχνότητα του μένει σταθερή
   γ. το μήκος κύματος δεν μεταβάλλεται
   δ. μεταβάλλονται το μήκος κύματος και η συχνότητα

3. Η κυματική κίνηση έχει ως αποτέλεσμα:
   α. μόνο τη διάδοση της διαταραχής
   β. μόνο την αλληλεπίδραση των μορίων του μέσου διάδοσης
   γ. μόνο τη μετάδοση της ενέργειας
   δ. όλα τα παραπάνω

4. Η ταχύτητα ενός ηχητικού κύματος εξαρτάται:
   α. από τη συχνότητα του ήχου
   β. από την ένταση του ήχου
   γ. από το υλικό στο οποίο διαδίδεται το ηχητικό κύμα
   δ. από το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος

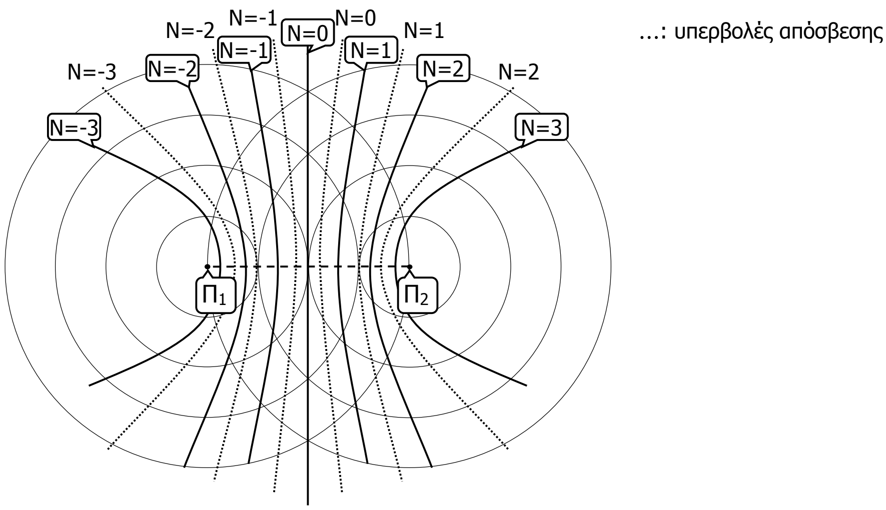
5. Κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα χωρίς απώλειες ενέργειας
   α. Τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του ελαστικού μέσου
   β. Τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του ελαστικού μέσου
   γ. Το αρμονικό κύμα διαδίδεται στα αέρια
   δ. Σχηματίζονται πυκνώματα και αραιώματα

6. Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται διάμηκες αρμονικό κύμα χωρίς απώλειες ενέργειας.
   α. Τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης

$\boxed{A' = 0}$ δηλαδή σημεία μονίμως ακίνητα.

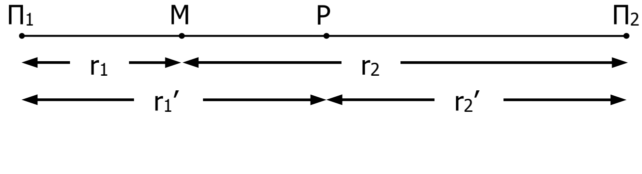
$$\sigma\upsilon\nu\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \pi.\frac{|r_1 - r_2|}{\lambda} = N.\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} |r_1 - r_2| = (2N+1)\dfrac{\lambda}{2},\ \ N = 0,1,2,... \\ \acute{\eta} \\ r_1 - r_2 = (2N+1)\dfrac{\lambda}{2},\ \ N = 0,\pm 1,\pm 2,... \end{array}}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία $r_1 - r_2$: σταθερό είναι υπερβολή.
Τα σημεία του μέσου βρίσκονται σε υπερβολές που ονομάζονται κροσσοί συμβολής.



- <u>Απόσταση 2 διαδοχικών σημείων με ακυρωτική συμβολή πάνω στην ευθεία που ενώνει τις δύο πηγές.</u>

Έστω M, P δύο διαδοχικά σημεία που παραμένουν ακίνητα (ακυρωτική συμβολή), πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ που ορίζουν οι δύο σύγχρονες πηγές Π_1, Π_2.

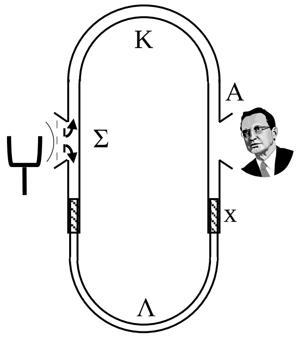


$$\left.\begin{array}{lll} M : & r_1 - r_2 = (2N+1)\dfrac{\lambda}{2} & = N\lambda + \dfrac{\lambda}{2} \\ P : & r_1' - r_2' = [2(N+1)+1]\dfrac{\lambda}{2} & = (2N+2+1) + \dfrac{\lambda}{2} = (2N+3)\dfrac{\lambda}{2} = N\lambda + \dfrac{3\lambda}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Αφαιρούμε κατά μέλη την πρώτη από τη δεύτερη σχέση και έχουμε:

Συμβολή ηχητικών κυμάτων

Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη μηχανικά κύματα. Το φαινόμενο της συμβολής των ηχητικών κυμάτων χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου. Η συσκευή που χρησιμοποιείται είναι αυτή του σχήματος και ονομάζεται συσκευή Koning ή Quinke.



Με τη βοήθεια πηγής ηχητικών κυμάτων παράγουμε ήχο συχνότητας f στο στόμιο Σ της συσκευής. Το ηχητικό κύμα χωρίζεται σε δύο όμοια τα οποία ακολουθούν τους δρόμους $\Sigma K A$ και $\Sigma \Lambda A$. Το τμήμα $\Sigma \Lambda A$ είναι κινητό και έτσι μπορούμε να μεταβάλλουμε το μήκος της διαδρομής του ήχου που ακολουθεί αυτό το σκέλος.

- Κάθε φορά που πετυχαίνουμε διαφορά:

$(\Sigma \Lambda A)-(\Sigma K A)=N.\lambda$ με $N=0,1,2,...$

έχουμε ενίσχυση του ήχου.

- Αν η διαφορά είναι:

$(\Sigma \Lambda A)-(\Sigma K A)=(2N+1)\dfrac{\lambda}{2}$ με $N=0,1,2,...$ έχουμε απόσβεση του ήχου.

Λυμένες ασκήσεις

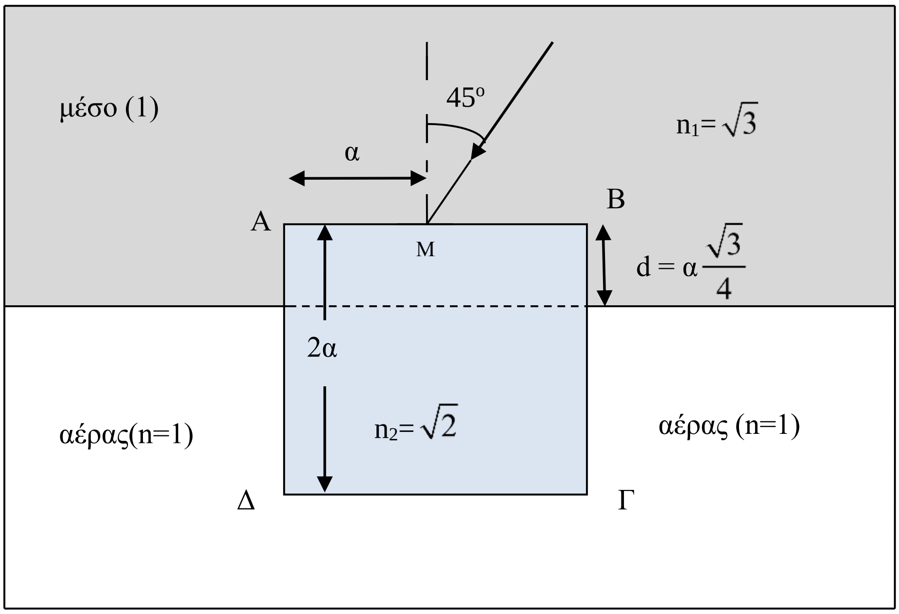
1. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα πλάτους $A=3.10^{-3}m$ και συχνότητα $f=60Hz$. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι: $\upsilon=1,2\, {m}/{s}$.

   Α. Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού που οι αποστάσεις του από τις πηγές των κυμάτων είναι $(\Pi_1\Sigma)=12cm$ και $(\Pi_2\Sigma)=8cm$;

   Β. Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης σε ένα σημείο P της επιφάνειας του υγρού που οι αποστάσεις του από τις πηγές των κυμάτων είναι $(\Pi_1 P)=7,5cm$ και $(\Pi_2 P)=4,5cm$;

   Γ. Πόσο είναι το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου N της επιφάνειας του υγρού που οι αποστάσεις του από τις πηγές των κυμάτων είναι $(\Pi_1 N)=15cm$ και $(\Pi_2 N)=14,5cm$;

18. Κυβικό πρίσμα ακμής 2α βρίσκεται εν μέρει μέσα στον αέρα και εν μέρει μέσα σε οπτικό μέσο (1).Στο σχήμα φαίνεται μία κάθετη τομή ΑΒΓΔ του κύβου. Στο μέσο Μ της ΑΒ προσπίπτει ακτίνα φωτός υπό γωνία 45^o.Ο δείκτης διάθλασης του μέσου (1) και του πρίσματος αντίστοιχα (για το μήκος κύματος της ακτινοβολίας αυτής στο κενό)είναι $n_1=\sqrt{3}$,$n_2=\sqrt{2}$.Ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι κατά

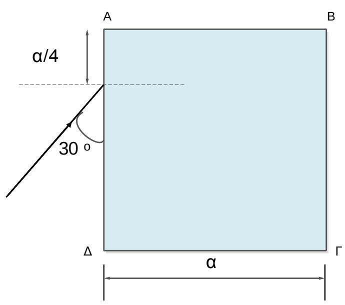


προσέγγιση ίσος με 1.Η διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων είναι παράλληλη στις ΑΒ και ΔΓ και απέχει από την ΑΒ απόσταση $d=\alpha\frac{\sqrt{3}}{4}$. Να συγκριθεί η διεύθυνση της τελικής πορείας της ακτίνας με αυτή της αρχικής.

Απαντήσεις

Παράλληλη της αρχικής

19. Σε γυάλινο κύβο πλευράς α= 2cm με δείκτη διάθλασης $n=\sqrt{3}$ προσπίπτει ακτίνα μονοχρωματικού φωτός, προερχόμενη από τον αέρα, όπως στο σχήμα.



α. Να σχεδιάσετε την πορεία της ακτίνας
β. Να βρεθεί το σημείο εξόδου της από τον κύβο
γ. Να υπολογίσετε την ολική εκτροπή.

Δίνεται: $\eta\mu 35^o=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.5. Διαγωνίσματα

2.5.1. Κύματα - 1ο κριτήριο αξιολόγησης

1ο Θέμα

Στις ερωτήσεις 1-4 να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1) Ένα αρμονικό κύμα που έχει μήκος κύματος λ = 2 m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο. Το κύμα φτάνει σε ένα σημείο Σ που απέχει x = 3m από την αρχή O μέτρησης των αποστάσεων (x = 0) τη χρονική στιγμή t_1. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σημείο O βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση. Τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος OΣ που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τη στιγμή t_1, είναι:

α. δύο

β. τρία

γ. τέσσερα

δ. πέντε (5 Μονάδες)

2) Δύο κύματα που έχουν πλάτος A και μήκος κύματος λ προέρχονται από σύγχρονες πηγές και συμβάλλουν σε ελαστικό μέσο. Η μικρότερη διαφορά αποστάσεων από τις πηγές ενός σημείου του ελαστικού μέσου, που ταλαντώνεται με πλάτος επίσης A είναι ίση με:

α. $\frac{\lambda}{2}$

β. $\frac{\lambda}{3}$

γ. $\frac{\lambda}{4}$

δ. $\frac{\lambda}{6}$ (5 Μονάδες)

3) Η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος είναι: y = 0,2 ημπ(t – 2x) (S.I) . Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα είναι:

α. π m/s

β. 0,2π m/s

γ. 0,5π m/s

δ. 0,2 m/s (5 Μονάδες)

4) Η εξίσωση ενός στάσιμου κύματος είναι: $y = 0{,}2\ \text{συν}\frac{\pi x}{15}\text{ημ}\frac{2\pi t}{5}$ (S.I.) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων της χορδής είναι:

α. 0,05π m/s

β. 0,08π m/s

γ. 0,15π m/s

δ. 0,2π m/s (5 Μονάδες)

5) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λανθασμένες:

2.6. Επαναληπτικά

2.6.1. Ταλαντώσεις-κύματα - 1ο κριτήριο αξιολόγησης

1ο Θέμα

Στις ερωτήσεις 1-4 να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1)Το τετράγωνο της περιόδου της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός συστήματος ελατηρίου - μάζας

α. είναι ανεξάρτητο από τη σταθερά του ελατηρίου.

β. είναι ανεξάρτητο από τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

γ. είναι ανάλογο με τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

δ. είναι ανάλογο με το πλάτος της ταλάντωσης.

(5 Μονάδες)

2)Η εξίσωση φορτίου - χρόνου σε κύκλωμα αμείωτων ηλεκτρικών ταλαντώσεων LC δίνεται από τη σχέση $q = Q\eta\mu\omega t$. Τότε η εξίσωση έντασης ρεύματος - χρόνου έχει τη μορφή

α. $i = Q\omega\eta\mu\omega t$

β. $i = Q\omega\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$

γ. $i = -Q\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$

δ. $i = -Q\omega\eta\mu\omega t$ (5 Μονάδες)

3)Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα:

α. είναι διαμήκη

β. υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας

γ. διαδίδονται σε όλα τα μέσα με την ίδια ταχύτητα

δ. δημιουργούνται από σταθερό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

(5 Μονάδες)

4)Μια ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία συχνότητας f_o και μήκους κύματος λο στο κενό εισέρχεται από το κενό σε διαφανές οπτικό μέσο. Αν f είναι η συχνότητα και λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο οπτικό μέσο, τότε ισχύει

α. $f \prec f_o$

β. $f \succ f_o$

γ. $\lambda \prec \lambda_o$

δ. $\lambda \succ \lambda_o$

(5 Μονάδες)

5) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λανθασμένες:

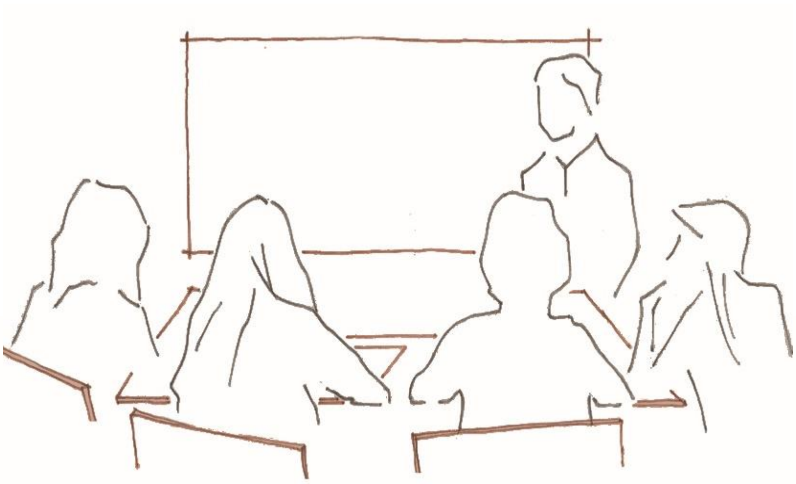
α.Το συνολικό διάστημα (μήκος) που διανύει ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος Α στη διάρκεια μιας περιόδου είναι 4Α.

β.Σε όλες τις περιπτώσεις συστημάτων ελατηρίου - μάζας που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση, το ρόλο της δύναμης επαναφοράς παίζει η δύναμη (τάση) του ελατηρίου .

γ.Κύκλωμα με πυκνωτή και πηνίο που παρουσιάζει συνολική αντίσταση R μπορεί να εκτελέσει εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση αν χρησιμοποιήσουμε ως διεγέρτη μια πηγή αρμονικά εναλλασσόμενης τάσης.

Βιβλιογραφία

1. Serway, Τόμος 1 (Μετάφραση Λ.Ρεσβάνη)
2. Huge D. Young, Τόμος Α΄(Εκδ. Παπαζήση)
3. Α. Κατσίκας, Τόμος Α (Εκδ. Ελληνοεκδοτική)
4. Α. Κατσίκας, Τόμος Β΄ (Εκδ. Ελληνοεκδοτική)
5. Θ.Σκαλωμένος-Ι.Χριστακόπουλος, Τόμος 1 (Εκδ. Σαββάλλας)
6. Θ.Σκαλωμένος-Ι.Χριστακόπουλος, Τόμος 2 (Εκδ. Σαββάλλας)
7. Θ.Πάλογος, Η. Ποντικός, Σ. Χαρισιάδης, Τόμος 2 (Εκδ. Γκρίτζαλη)
8. Παναγιωτακόπουλος, Θέματα Φυσικής, (Εκδ. Σαββάλλας)
9. Μαθιουδάκης, Παναγιωτακόπουλος, Τόμος Α (Εκδ. Σαββάλλας)
10. Μαθιουδάκης, Παναγιωτακόπουλος, Τόμος Β΄ (Εκδ. Σαββάλλας)
11. Α. και Σ. Σαββάλας, Τόμος Α΄ (Εκδ. Σαββάλλας)
12. Α. και Σ. Σαββάλας, Τόμος Β΄ (Εκδ. Σαββάλλας)
13. Κ.Ε.Ε.



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
Ασπασίας 76-78, Χολαργός   Τηλ. 210 6512099
e-mail: stogiannis@stogiannis.edu.gr
www.stogiannis.edu.gr