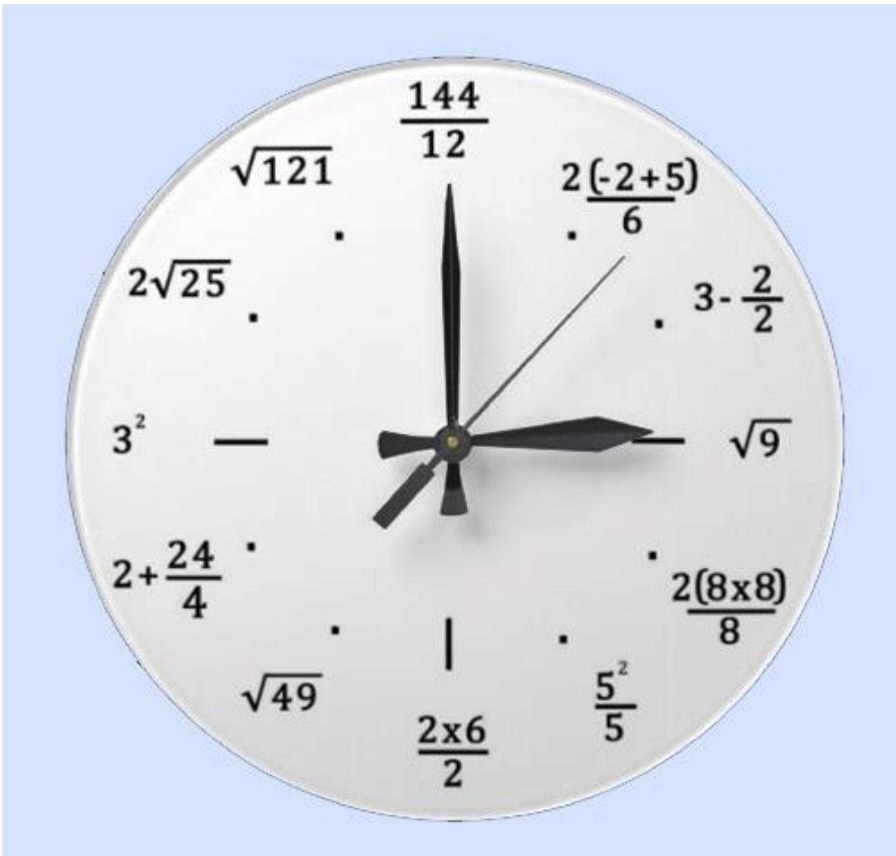
Ν. ΤΣΟΥΡΜΑΣ   Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
Π. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ   Β. ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ
Γ. ΒΑΡΔΑΚΑΣΤΑΝΗΣ Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ 2

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πρόλογος

Αντικείμενο της επιστήμης των Μαθηματικών είναι η μελέτη θεμάτων σχετικών με τη δομή (τα σχήματα), την ποσότητα (τους αριθμούς), το χώρο, τη μεταβολή, τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας. Η μελέτη του χώρου και του σχήματος, που ξεκίνησε από αστρονομικές παρατηρήσεις (Βαβυλώνιοι) ή και από μετρήσεις εμβαδών (Αιγύπτιοι), θεμελιώθηκε ήδη νωρίς στη γεωμετρία του Ευκλείδη. Το έργο του Ευκλείδη υπήρξε ίσως ο πρώτος μεγάλος σταθμός στην ιστορία των μαθηματικών, καθώς εισήγαγε την αξιωματική μέθοδο.

Τα πιο αρχαία μαθηματικά κείμενα που είναι διαθέσιμα είναι τα Βαβυλωνιακά και τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά. Όλα αυτά τα κείμενα περιλαμβάνουν το αποκαλούμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα, την πιο αρχαία και διαδεδομένη μαθηματική εξέλιξη μετά τη βασική Αριθμητική και Γεωμετρία. Ωστόσο, η μελέτη των Μαθηματικών ως ένα αυτοτελές πεδίο άρχισε τον 6ο αιώνα π.Χ. με τη Σχολή των Πυθαγορείων, που πιστώνονται και τον όρο «Μαθηματικά», από την αρχαία ελληνική λέξη «μάθημα», που σημαίνει «πεδίο μάθησης». Οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί εισήγαγαν την επαγωγική λογική και τη μαθηματική ακρίβεια στις αποδείξεις.

Στο βιβλίο των Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ΄ λυκείου θα παρουσιάσουμε την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Γ’ τάξης του Γενικού Λυκείου. Το βιβλίο αυτό αποτελείται από δύο μέρη (Άλγεβρα και Ανάλυση). Στο πρώτο μέρος της Άλγεβρας γίνεται εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς, οι οποίοι είναι προέκταση των Πραγματικών Αριθμών. Στο δεύτερο μέρος της Ανάλυσης παρουσιάζονται οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος αντιστοίχως και γίνεται χρήση των εννοιών αυτών σε πολλές εφαρμογές, ενώ γίνεται πρώτη φορά αναφορά στην έννοια του ορίου.

Στο βιβλίο έχουν παρουσιαστεί με μαθηματική αυστηρότητα οι απαραίτητοι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι έννοιες που αποτελούν τον κορμό ορισμένων κεφαλαίων, αλλά συγχρόνως έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην παρουσίαση υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων. Σε κάθε κεφάλαιο έχει γίνει προσπάθεια, ώστε ο αναγνώστης να ενημερωθεί σε βάθος για τη θεωρία και τις διάφορες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να εφοδιαστεί με τόσα πολλά λυμένα παραδείγματα, ώστε να αποκτήσει μια ευχέρεια για την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει πληθώρα άλυτων ασκήσεων για την πληρέστερη εξάσκηση του μαθητή, καθώς και ενδεικτικά προτεινόμενα διαγωνίσματα προόδου.

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα της συσσωρευμένης εμπειρίας που έχει συγκεντρώσει η πολυμελής ομάδα μαθηματικών του φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης «Ε. Δ. Στογιάννη» λόγω της πολυετούς διδασκαλίας του μαθήματος. Απευθύνεται σε μαθητές της Γ’ λυκείου. Επί πλέον, τονίζουμε εδώ ότι το παρόν σύγγραμμα αποτελεί ένα χρήσιμο και εύχρηστο βοήθημα αναφοράς για καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται είτε στο δημόσιο, είτε στον ιδιωτικό τομέα. Από παιδαγωγικής απόψεως, εκτός της προφανούς χρησιμότητας του βιβλίου αυτού, πιστεύουμε ότι δρα και αναδρομικά ως εμπέδωση κάποιων θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων, που στο παρελθόν ίσως φαίνονταν άνευ αντικειμένου.

Ο συγγραφέας

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Διαφορικός Λογισμός

1.1. Η έννοια της παραγώγου

1.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός : Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.

Η f ονομάζεται παραγωγίσιμη σε σημείο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

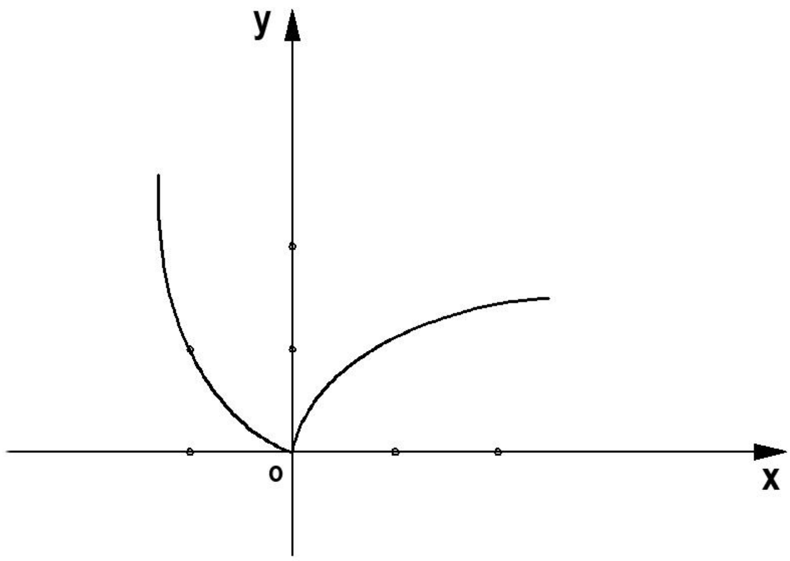
Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'(x_0)$ ή $\dfrac{df(x_0)}{x_0}$. Δηλαδή:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Προφανώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν, υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

Αν στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$



Παράγωγος και συνέχεια

Θεώρημα : Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Παρατήρηση: Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

1.1.2. **Λυμένες ασκήσεις**

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 3x+\text{ημ}x\,, & x<0 \\ x\sqrt{x}+4x\,, & x\geq 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και να βρείτε (αν υπάρχει) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,f(0))$.

Λύση

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x+\text{ημ}x-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(3+\frac{\text{ημ}x}{x}\right)=3+1=4$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}+4x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}+4\right)=4$$

1.1.3. **Άλυτες ασκήσεις**

1. Να βρείτε, αν υπάρχει, την παράγωγο της f στο x_0, όταν:

α. $f(x)=|x^2-3x|$ στο $x_0=2$

β. $f(x)=\begin{cases} 3x^2-5x+6\,, & x\leq 1 \\ 2\sqrt{x^2+3}\,, & x>1 \end{cases}$ στο $x_0=1$ (Δ' Δέσμη 1988)

γ. $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{3}{x}\,, & x\neq 0 \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$ στο $x_0=0$

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}}\,, & x<0 \\ 0\,, & x=0 \\ x^3\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,, & x>0 \end{cases}$ στο σημείο $x_0=0$.

3. Έστω συνάρτηση f, έτσι ώστε: $|f(x)|\leq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να δείξετε ότι και η συνάρτηση:

$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\leq x_0 \\ f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), & x>x_0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{9}{4}\,, & x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-3\sqrt{3}}{4x}\,, & x>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Να δείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της c_f στο σημείο $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{3}$.

1.2. Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – παράγωγος συνάρτηση

1.2.1. Στοιχεία θεωρίας

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε σύνολο A. Αν $A_1 \subseteq A$ το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας σε κάθε $x \in A_1$ το $f'(x)$ τότε ορίζουμε μία νέα συνάρτηση:

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** ή απλά **παράγωγος** της f και συμβολίζεται $f'(x)$ ή $\frac{df}{dx}$.

Ομοίως ορίζεται η **δεύτερη παράγωγος** $f''(x)$ της f στο σύνολο $A_2 \subseteq A_1$, στο οποίο η f' είναι παραγωγίσιμη.

Επαγωγικά, ορίζεται η νιοστή παράγωγος της f με $\nu \geq 3$ και συμβολίζεται $f^{(\nu)}(x)$.

Δηλαδή: $f^{\nu}(x) = \left(f^{(\nu-1)}(x)\right)'$, $\nu \geq 3$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $\left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
- $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
- $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
- $(\ell n x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

1.2.2. **Λυμένες ασκήσεις**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

Λύση

Προφανώς το σημείο M δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της f, άρα δεν μπορεί να είναι το σημείο επαφής.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση εφαπτομένης της c_f είναι:

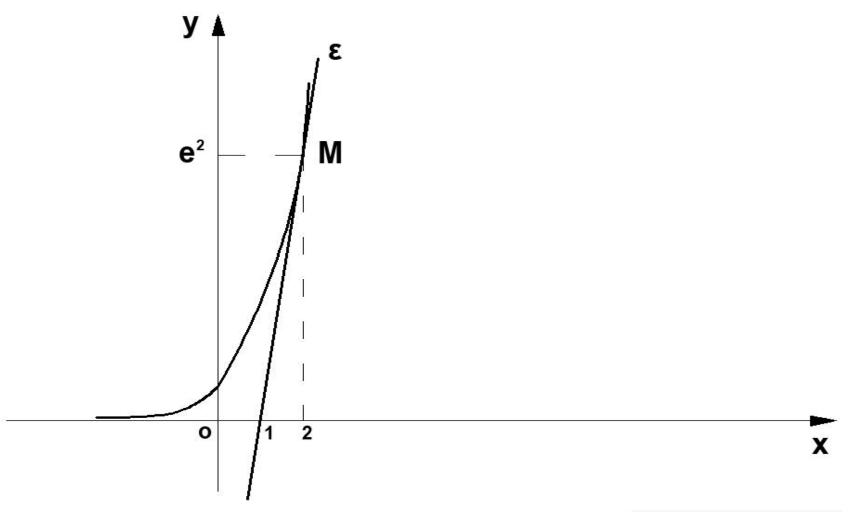
$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$$

Όμως το σημείο A ανήκει στην εφαπτομένη, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$0-e^{x_0}=e^{x_0}(1-x_0)$$
$$-e^{x_0}=e^{x_0}(1-x_0)$$
$$-1=1-x_0 \quad (\text{γιατί } e^{x_0}\neq 0)$$
$$x_0=2$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι το $M(2,e^2)$ και η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$$y-e^2=e^2(x-2)$$
$$y=e^2x-e^2 .$$



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ell nx$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της c_f η οποία σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

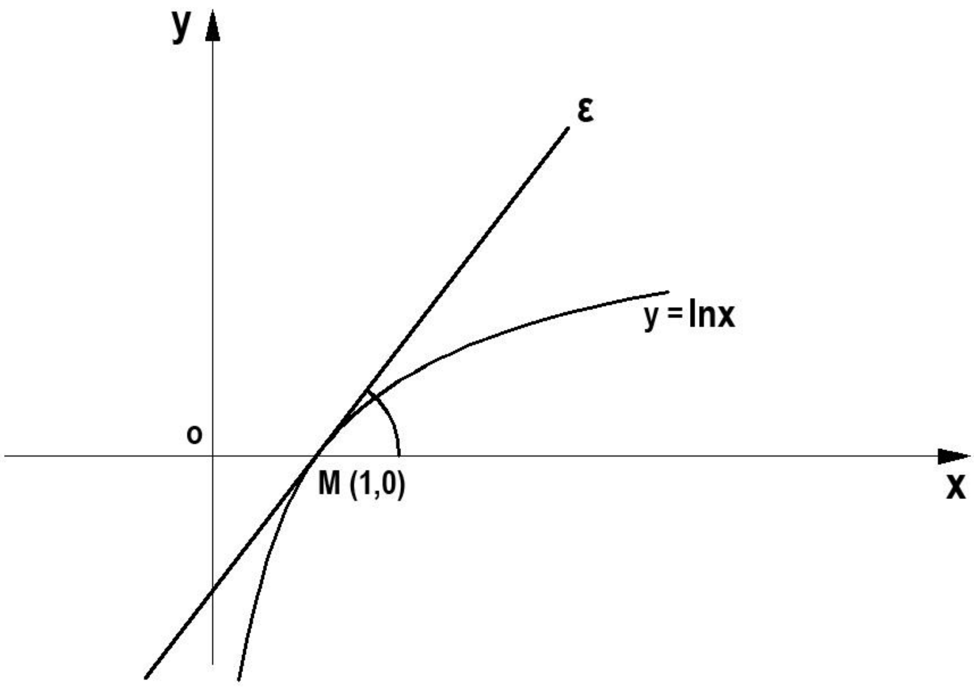
Λύση

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την c_f.

Τότε: $\lambda_\varepsilon = \text{εφ}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=1 \Leftrightarrow x_0=1$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$
$$y-0=1\cdot(x-1)$$
$$y=x-1$$



1.2.3. **Άλυτες ασκήσεις**

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της συνάρτησης f(x) = lnx που περνά από την αρχή των αξόνων.

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της $f(x) = x^3$ που διέρχεται από το σημείο Α(0,-16).

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Αν η ευθεία $\varepsilon : y=(a^2-4)x-16$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(x_0, x_0^3)$, να βρεθούν το σημείο A και το a.

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ που σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{3}$ με τον άξονα $x'x$.

5. Αν (ε) η εφαπτομένη της παραβολής $f(x)=x^2$ στο σημείο $A(-2,4)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην (ε).

6. Έστω συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της c_f στα κοινά σημεία της με την ευθεία $y=-x+2$ και η εφαπτομένη στο $x_0=0$.

7. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $P(a,\beta)$ με $\beta < a^2$ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της παραβολής $y=x^2$. Αν το P είναι σημείο της ευθείας $y=-\dfrac{1}{4}$, τότε οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

1.3. Κανόνες παραγώγισης

1.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Θεώρημα: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει:

$$\boxed{(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)}$$

Θεώρημα: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)}$$

Πόρισμα: Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $c\in\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $c\cdot f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\boxed{(cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)}$$

Θεώρημα: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Άμεση συνέπεια του κανόνα του πηλίκου είναι τα εξής:

- $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu\cdot x^{-\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$
- $(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$ και $(\text{εφ}x)'=-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα: Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\boxed{(fog)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι και τα εξής:

- $\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1}$, $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $x>0$
- $\left(a^x\right)'=a^x\cdot \ell na$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in\mathbb{R}$
- $\left(\ell n|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$

1.3.2. **Λυμένες ασκήσεις**

1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ και $g(x)=\dfrac{2}{x}$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο. Στη συνέχεια να βρεθεί η εφαπτομένη.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η τετμημένη x_0 του κοινού σημείου των c_f και c_g, είναι η λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^2+1=2x\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Άρα το κοινό σημείο των c_f, c_g είναι το $M(1,2)$.

Άρα προκύπτει το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a}{x_0} &= 8x_0+4 \\ \frac{a}{x_0^2} &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{8x_0^2}{x_0} &= 8x_0+4 \\ a &= 8x_0^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{4} \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να βρούμε την εξίσωση εφαπτομένης της c_g στο $M(x_0, g(x_0))$, δηλαδή $y - g(x_0) = g'(x_0)\cdot(x - x_0)$

$$y + \frac{a}{x_0} = \frac{a}{x_0^2}(x - x_0)$$

$$y = \frac{a}{x_0^2}x - \frac{2a}{x_0}$$

Για να έχουν οι c_f, c_g κοινή εφαπτομένη στο x_0 πρέπει οι ευθείες $y = 8x + 4$ και $y = \frac{a}{x_0^2}x - \frac{2a}{x_0}$ να ταυτίζονται, άρα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{x_0^2} &= 8 \\ -\frac{2a}{x_0} &= 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a &= 8x_0^2 \\ -\frac{16x_0^2}{x_0} &= 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= 8x_0^2 \\ x_0 &= -\frac{1}{4} \ \text{ άρα : } \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x + 3$ και $g(x) = 1 - x^2$ δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Λύση

Προφανώς η κοινή εφαπτομένη των c_f, c_g δεν εφάπτεται σε κοινό τους σημείο γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν τέμνονται, αφού η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη. Συνεπώς, θα εφάπτεται σε διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$.

Βρίσκουμε τις εφαπτόμενες των c_f και c_g στα A και B αντίστοιχα:

$$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)\cdot(x - x_1) \quad \Leftrightarrow y - (x_1^2 - 2x_1 + 3) = (2x_1 - 2)(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y = (2x_1 - 2)x - x_1^2 + 3$$

και $\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)\cdot(x - x_2) \Leftrightarrow y - \left(1 - x_2^2\right) = -2x_2(x - x_2)$

$\Leftrightarrow y = -2x_2 \cdot x + x_2^2 + 1$

Για να έχουμε κοινή εφαπτομένη θα πρέπει οι ε_1, ε_2 να ταυτίζονται, άρα:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - 2 = -2x_2 \\ -x_1^2 + 3 = x_2^2 + 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = 1 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 = 1 - x_2 \\ (1 - x_2)^2 + x_2^2 = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = 1 - x_2 \\ 2x_2^2 - 2x_2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ή } x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Αν $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ τότε: $x_1 = 1 - \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$

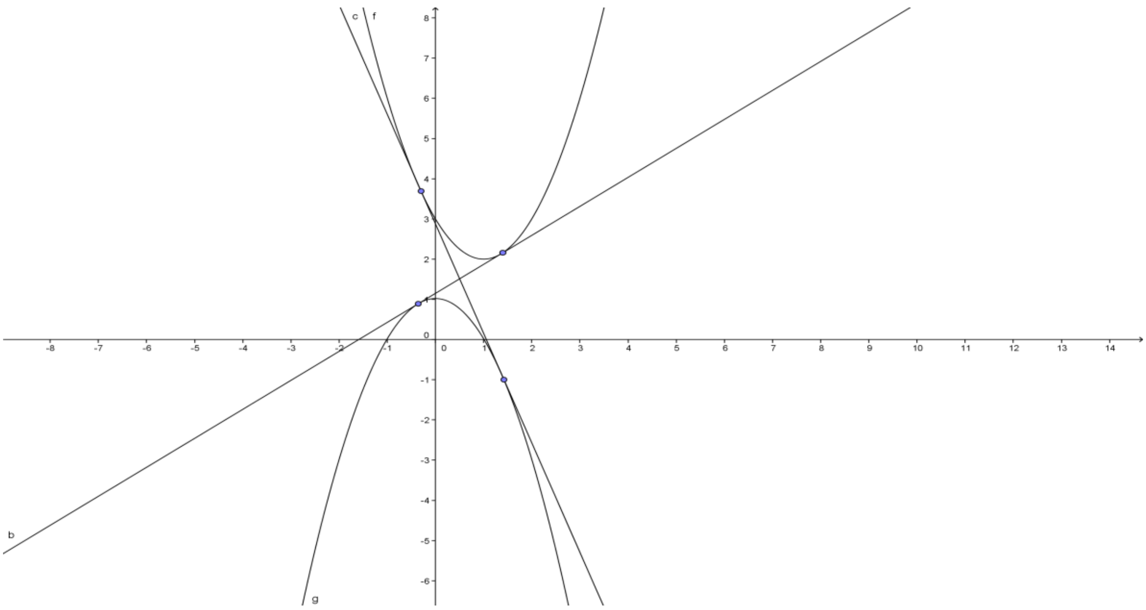
Αν $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ τότε: $x_1 = 1 - \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Άρα έχουμε δύο περιπτώσεις, δηλαδή

$$A_1\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right), \quad B_1\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, g\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

και

$$A_2\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)\right), \quad B_2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, g\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\right)$$



1.3.3. **Άλυτες ασκήσεις**

1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

α. $f(x)=4x^3-2\ln x+\sqrt{x}+3\text{συν}x-\text{ημ}\frac{\pi}{3}$ β. $f(x)=(x^3-x)\text{ημ}x-2x^3\ln x+\frac{xe^x}{4}$

γ. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}$ δ. $f(x)=x^3\sqrt{x}\ln x$ ε. $f(x)=\frac{1}{\text{ημ}x}+\frac{1}{\text{συν}x}$

2. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x, & x<0\\ 2\sqrt{x}+x, & x\geq 0\end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases}(x^2+7)\text{ημ}x, & x\leq 0\\ x^3\text{συν}x+7x, & x>0\end{cases}$

3. Στις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη x_0:

α. $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$, $x_0 = 4$ β. $f(x) = \frac{\text{ημ}x}{x-x\text{συν}x}$, $x_0 = \pi$

γ. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$ δ. $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x_0 = 0$

ε. $f(x) = \text{ημ}x\text{συν}x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι:

α. Παράλληλη στην ευθεία y=2x, αν $f(x)=2x+\frac{1+\ln x}{x}$

β. Κάθετη στην ευθεία x+3y+1=0, αν $f(x)=3x-\frac{\ln x}{x^2}$.

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους. Έστω ακόμη ότι είναι $g(x_0)\neq 0$ και $g'(x_0)\neq 0$. Αν για τη συνάρτηση $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ισχύει $F'(x_0)=0$, να δείξετε ότι: $F(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

(Πανελλήνιες 1982)

Η συνάρτηση του σχήματος παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία x_0, x_2 και x_4. Στο x_2 παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

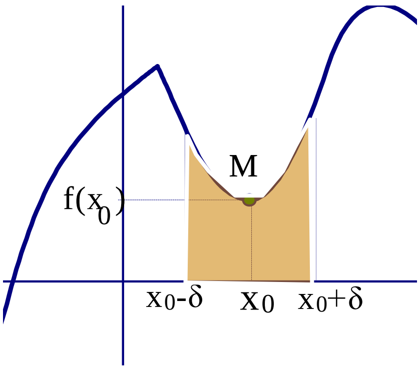
Επίσης στα σημεία x_1, x_3 και β παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Όμως δεν έχει ολικό ελάχιστο.

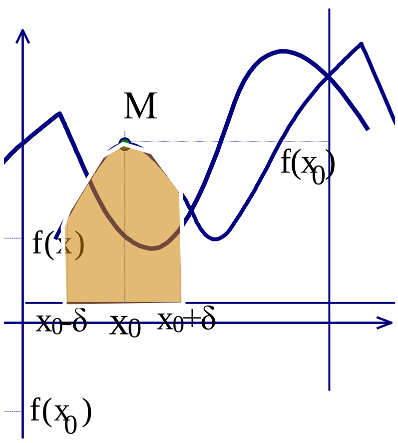
Ακόμη βλέπουμε ότι στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, που παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Αυτό μας οδηγεί στο πολύ σημαντικό θεώρημα του Fermat:

Θεώρημα (Fermat)

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$.

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, δηλαδή αν $f'(x_0)=0$ σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν παρουσιάζει υποχρεωτικά στο x_0 τοπικό ακρότατο. Το x_0 όμως είναι πιθανή θέση τοπικού ακρότατου.





Γενικά, οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε διάστημα Δ, είναι:

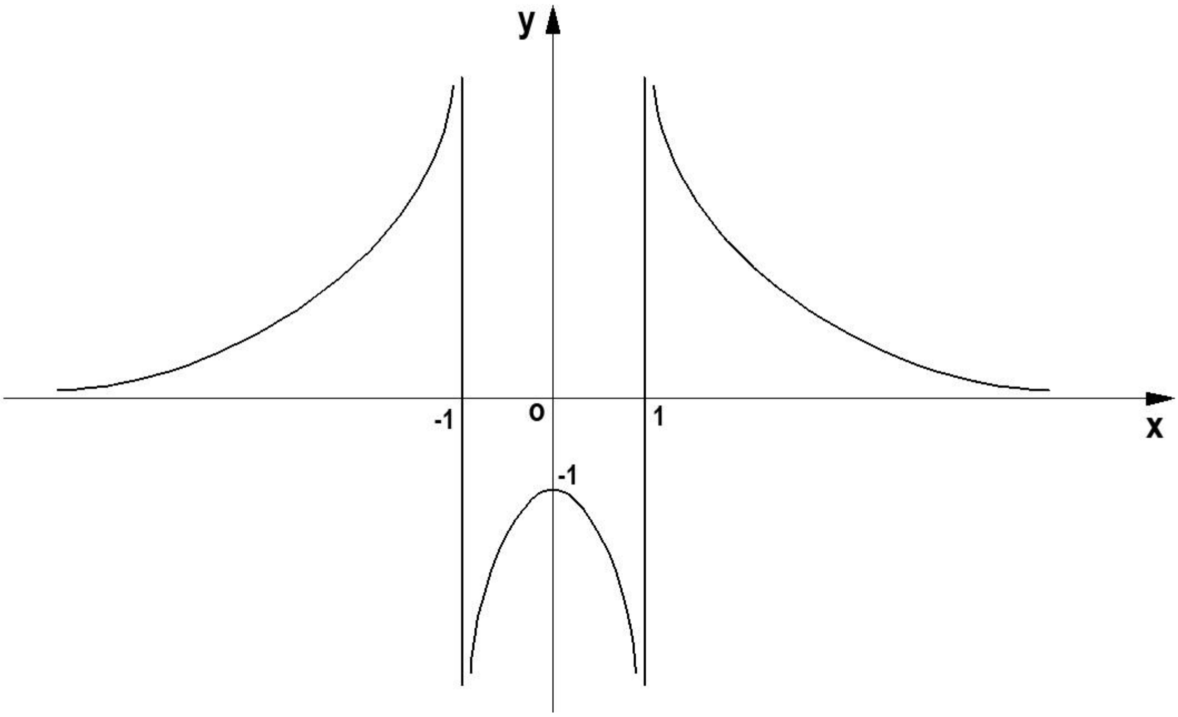
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ, αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της.

Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$ -1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+ 0	-	-
$f''(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	0 ↺ $+\infty$	$-\infty$ ↗	↷ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0

max

$f(0)=-1$



1.11.1. **Άλυτες ασκήσεις**

1. Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις και να γίνει η γραφική τους παράσταση:

α. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ β. $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ γ. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

δ. $f(x)=x^x$ ε. $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$ στ. $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x^2}$

ζ. $f(x)=\dfrac{e^x-3}{e^x+2}$ η. $f(x)=\text{συν}^2x$ θ. $f(x)=\dfrac{1}{2}\ell n\dfrac{1+x}{1-x}$

1.13. **Επαναληπτικές ασκήσεις**

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, έτσι ώστε :

- Η f συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f(x)-3}{x-2} = 3$
- $g(x) = (x^3 + 2x) f(x)$

α. Να δείξετε ότι $f(2) = \dfrac{3}{2}$

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $x_0 = 2$.

2. Αν $f(x) \le g(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = h'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$, τότε να δείξετε ότι: $f'(x_0) = g'(x_0) = h'(x_0)$.

3. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και $g(x) = \left|x^2 - x\right| \cdot f(x)$, να δείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, τότε $f(1) = 0$.

4. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει $\ell im\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(2x)}{x} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $f'(0) = -\lambda$.

5. Αν $f(x) = \begin{cases} g(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = g(0) = 0$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

6. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0 = a$. Αν $\ell im\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)}{h + \eta\mu 2h} = 2$ να υπολογίσετε την παράγωγο της f στο $x_0 = a$.

7. Για την άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2,6)$ και $f'(2) = 5$.

Κεφάλαιο 2

Ολοκληρωτικός λογισμός

2.1. Αόριστο ολοκλήρωμα

2.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ, ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = \eta\mu x$ είναι μία αρχική της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, αφού $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

- Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ, τότε στο διάστημα αυτό έχει παράγουσα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- Η έννοια της παράγουσας συνάρτησης ορίζεται μόνο σε διάστημα.
- Κάθε συνάρτηση δεν έχει απαραίτητα μία αρχική.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ δεν είναι παράγουσα της $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ γιατί η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

όπου $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης με βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $Q(x)$.

Τότε έχουμε: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$ και ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\pi(x)dx+\int\frac{\upsilon(x)}{Q(x)}dx$, ανάγεται στην πρώτη περίπτωση.

Παραδείγματα:

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int\frac{x+2}{x^2-4x+3}dx$ β. $\int\frac{x+10}{x^3-3x^2+4}$ γ. $\int\frac{2x^3+8x}{x^2+3x+2}dx$

Λύση

α. $\frac{x+2}{x^2-4x+3}=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$, άρα:

$x+2=A(x-3)+B(x-1)\Leftrightarrow x+2=(A+B)x-3A-B$, συνεπώς:

$\left.\begin{array}{r}A+B=1\\-3A-B=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}A=-\frac{3}{2}\\B=\frac{5}{2}\end{array}$, οπότε έχουμε:

$$I=\int\left(\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3}\right)dx=-\frac{3}{2}\ell n|x-1|+\frac{5}{2}\ell n|x-3|+c$$

$$I=\int\left(\frac{-\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3}\right)dx=-\frac{3}{2}\ell n|x-1|+\frac{5}{2}\ell n|x-3|+c$$

β. $\frac{x+10}{x^3-3x^2+4}=\frac{x+10}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{(x-2)^2}$

άρα: $x+10=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+\Gamma(x+1)\Leftrightarrow$

$$x+10=Ax^2-4Ax+4A+Bx^2+Bx-2Bx-2B+\Gamma x+\Gamma\Leftrightarrow$$
$$x+10=(A+B)x^2+(\Gamma-B-4A)x+4A-2B+\Gamma$$

συνεπώς: $\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ \Gamma-B-4A&=1 \\ 4A-2B+\Gamma&=10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} B&=-A \\ \Gamma-3A&=1 \\ \Gamma+6A&=10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} A&=1 \\ B&=-1 \\ \Gamma&=4 \end{aligned}$

οπότε έχουμε: $I=\int\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]dx=\ell n|x+1|-\ell n|x-2|-\frac{4}{x-2}+c$.

γ. Εκτελούμε την διαίρεση και έχουμε:

$2x^3+8x=(x^2+3x+2)(2x-6)+22x+12$

άρα: $\frac{2x^3+8x}{x^2+3x+2}=2x-6+\frac{22x+12}{x^2+3x+2}$

Όμως: $\frac{22x+12}{x^2+3x+2}=\frac{22x+12}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$

άρα: $22x+12=A(x+2)+B(x+1)$

$22x+12=(A+B)x+2A+B$

$\left.\begin{aligned} A+B&=22 \\ 2A+B&=12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} A&=-10 \\ B&=32 \end{aligned}$ οπότε:

$$I=\int\frac{2x^3+8x}{x^2+3x+2}dx=\int\left(2x-6+\frac{-10}{x+1}+\frac{32}{x+2}\right)dx=$$
$$=x^2-6x-10\ell n|x+1|+32\ell n|x+2|+c$$

Ολοκληρώματα αναγωγικού τύπου

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζουν ολοκληρώματα όπου στην ολοκληρωτέα παράσταση εμφανίζεται παράγοντας υψωμένος στην ν. Τότε χρησιμοποιώντας τους κανόνες ολοκλήρωσης προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μία σχέση που να συνδέει το αρχικό ολοκλήρωμα με άλλο της ίδιας μορφής και με μικρότερο εκθέτη. Η σχέση αυτή ονομάζεται **αναγωγικός τύπος**.

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_\nu=\int(\ell nx)^\nu dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

2.2.2. **Άλυτες ασκήσεις**

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int e^{x-1}\cdot\left(x^2-2x+3\right)dx$ β. $\int xe^{-2x}dx$

γ. $\int x^2 ημ3x dx$ δ. $\int (3x+5)συν(2x+1)dx$

ε. $\int \left(x^2+x\right)\ell n x dx$ στ. $\int \ell n\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$

ζ. $\int e^{2x} ημx dx$ η. $\int e^{3x}\cdot συν2x dx$

θ. $\int συν(\ell n x)dx$.

2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(x+1)e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Αν η C_f διέρχεται από το $M(1,2)$, να βρεθεί ο τύπος της f.

3. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)+f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η $f(x)$, αν γνωρίζουμε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $(0,1)$.

4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $e^{f'(x)}\cdot x^x=x$ για κάθε $x>0$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M\left(1,\frac{1}{4}\right)$ να βρεθεί ο τύπος της f.

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int συν(3x+2)dx$ β. $\int \left(x^2+x+1\right)^4(2x+1)dx$ γ. $\int \frac{1}{x\ell n x}dx$

δ. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ ε. $\int \frac{εφ^4 x}{συν^2 x}dx$ στ. $\int \frac{\sqrt{\ell n x}}{x}dx$

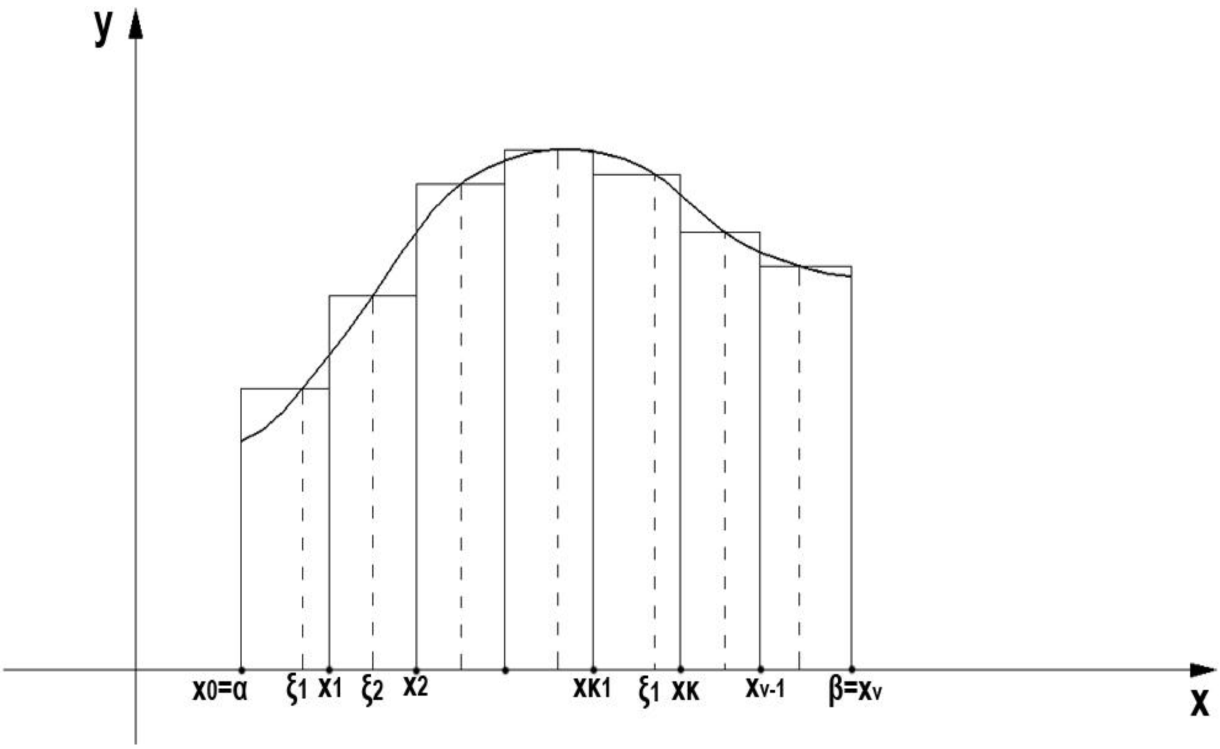
ζ. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ η. $\int \frac{συνx}{\sqrt{1+ημx}}dx$ θ. $\int e^x\cdot εφ^2\left(e^x\right)dx$

2.3. Ορισμένο ολοκλήρωμα

2.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$. Χωρίζουμε το διάστημα $[a,\beta]$ σε ν ισομήκη διαστήματα, μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - a}{\nu}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ακολούθως, επιλέγουμε τυχαία σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα ένα ξ_κ, δηλαδή $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa \in \{1,2,3,...,\nu\}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot \Delta x$.

Ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f από a ως β το όριο $\lim_{\nu\to+\infty}\left[\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\cdot \Delta x\right]$

και το συμβολίζουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

Οι αριθμοί a,β ονομάζονται όρια του ολοκληρώματος.

Γενικά θέματα

1. α.Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1 , z_2 ισχύει $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$, αν και μόνο αν, $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.

β. Έστω συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,\beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=a^2+i\cdot f(a)$, $w=f(\beta)+i\beta^2$, $a,\beta\neq 0$. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[a,\beta]$.

(Α’ Δέσμη 1995)

2. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t)=2t+\mu$, $t\in\mathbb{R}$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Μία επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές με τον τύπο: $E(t)=(t-1)\cdot\varphi(t)$, $t\geq 0$, όπου t συμβολίζει τον χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές με τον τύπο: $k(t)=\varphi(t+4)$, $t\geq 0$.

α. Να βρείτε την συνάρτηση κέρδους $P(t)$ για $t\geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας, η επιχείρηση παρουσίαζε ζημιά 12 εκατομμύρια δραχμές.

β. Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ. Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους, στο τέλος του 2ου έτους;

δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος: $I=\dfrac{111}{2}\int_0^6 P(t)\,dt$.

(Δ’ Δέσμη 1998)

3. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=2^{12}\left(e^{-4x}-e^{-ax}\right)$, $x\geq 0$, όπου $a\in\mathbb{R}$ και $a\geq 4$.

α. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=h(0)=0$.

β. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα την $h(x)$.

γ. Αν x_1 η ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 η ρίζα της 2ης παραγώγου της $h(x)$, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1,x_2.

Βιβλιογραφία

1. G. Aligniac, Themes Mathematiques, Montpellier (nouvelle collection), 1993, εκδόσεις Αίθρα.
2. Α. Μπάρλας, Μαθηματικά Γ΄ λυκείου, 2014, Ελληνοεκδοτική.
3. Α. Σκύφας, Π. Γιαννάκος, Δ. Ανδριώτης, Ε Σαρρή, Επαναληπτικά θέματα Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, 2014, Εκδόσεις Έναστρον.
4. Β. Γατσινάρης, Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης (μέρος α΄) (Β΄ έκδοση), 2013, εκδόσεις Πατάκη.
5. Β. Γατσινάρης, Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, μέρος β΄ (αναμορφωμένη έκδοση), 2014, εκδόσεις Πατάκη.
6. Β.Γ. Παπαδάκης, Μαθηματικά Γ΄ λυκείου, 2013, Εκδόσεις Σαββάλας.
7. Β.Γ. Παπαδάκης, Η επανάληψη Μαθηματικά Γ΄Λυκειου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2013, Εκδόσεις Σαββάλας.
8. Γ. Βρύζας, Χ. Κωσταντόπουλος, Α. Μαναρίδης, Μαθηματικά Γ λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, τεύχος 1, 2011, εκδόσεις Ξιφαράς.
9. Γ. Βρύζας, Χ. Κωσταντόπουλος, Α. Μαναρίδης, Μαθηματικά Γ λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, τεύχος 2, 2011, εκδόσεις Ξιφαράς.
10. Γ. Μπαραλός, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου.
11. Γ. Μπαϊλάκης, Το 4ο Θέμα των Μαθηματικών, 2002, Εκδόσεις Σαββάλας.
12. Δ. Τσεκούρας, συλλογή επαναληπτικών θεμάτων θετικής-τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2008, Εκδόσεις Τσεκούρα.
13. Ε. Τόλης, Σ. Μιχαήλογλου, Μαθηματικά Γ΄ λυκείου, 2013, Εκδοτικός Οίκος Α. Α. Λιβάνη.
14. Η. Κωνσταντόπουλος, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 2002, Εκδόσεις Γκρίτζαλης.
15. Κ. Γιαννιτσιώτης, Α. Καραγεώργος, θεώρημα Fermat-Rolle, 2000, Εκδόσεις Κωστόγιαννος.
16. Κ. Γιαννιτσιώτης, Α. Καραγεώργος, θεώρημα Μέσης τιμής διαφορκού λογισμού και συνέπειες, 2000, Εκδόσεις Κωστόγιαννος.
17. Κ. Γκατζούλης, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 2008, Εκδόσεις Γκατζούλη.

18. Κ. Τζιρώνης, Θ. Τζουβάρας, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 1999, Εκδόσεις Σαββάλας.
19. Ν. Σκομπρής, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, β΄ τεύχος, 2014, Εκδόσεις Σαββάλας.
20. Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Μαθηματικά Β- Γ' Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, 2012, ΟΕΔΒ.
21. Τ. Τσούχλης, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 2003, Εκδόσεις Σαββάλας.
22. Χ.Κ. Αχτσαλωτίδης, Μαθηματικά, ανάλυση Γ΄ ενιαίου λυκείου, 2006, Μεταίχμιο.
23. Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2012, Εκδόσεις Σαββάλας.
24. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδος.
25. Περιοδικά Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας από 1998 – 2015.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
Ασπασίας 76-78, Χολαργός Τηλ. 210 6512099
e-mail: stogiannis@stogiannis.edu.gr
www.stogiannis.edu.gr