Ν. ΤΣΟΥΡΜΑΣ   Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
Π. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ   Β. ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ
Γ. ΒΑΡΔΑΚΑΣΤΑΝΗΣ Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΟΜΟΣ 1 Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πρόλογος

Αντικείμενο της επιστήμης των Μαθηματικών είναι η μελέτη θεμάτων σχετικών με τη δομή (τα σχήματα), την ποσότητα (τους αριθμούς), το χώρο, τη μεταβολή, τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας. Η μελέτη του χώρου και του σχήματος, που ξεκίνησε από αστρονομικές παρατηρήσεις (Βαβυλώνιοι) ή και από μετρήσεις εμβαδών (Αιγύπτιοι), θεμελιώθηκε ήδη νωρίς στη γεωμετρία του Ευκλείδη. Το έργο του Ευκλείδη υπήρξε ίσως ο πρώτος μεγάλος σταθμός στην ιστορία των μαθηματικών, καθώς εισήγαγε την αξιωματική μέθοδο.

Τα πιο αρχαία μαθηματικά κείμενα που είναι διαθέσιμα είναι τα Βαβυλωνιακά και τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά. Όλα αυτά τα κείμενα περιλαμβάνουν το αποκαλούμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα, την πιο αρχαία και διαδεδομένη μαθηματική εξέλιξη μετά τη βασική Αριθμητική και Γεωμετρία. Ωστόσο, η μελέτη των Μαθηματικών ως ένα αυτοτελές πεδίο άρχισε τον 6ο αιώνα π.Χ. με τη Σχολή των Πυθαγορείων, που πιστώνονται και τον όρο «Μαθηματικά», από την αρχαία ελληνική λέξη «μάθημα», που σημαίνει «πεδίο μάθησης». Οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί εισήγαγαν την επαγωγική λογική και τη μαθηματική ακρίβεια στις αποδείξεις.

Στο βιβλίο των Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ΄ λυκείου θα παρουσιάσουμε την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Γ’ τάξης του Γενικού Λυκείου. Το βιβλίο αυτό αποτελείται από δύο μέρη (Άλγεβρα και Ανάλυση). Στο πρώτο μέρος της Άλγεβρας γίνεται εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς, οι οποίοι είναι προέκταση των Πραγματικών Αριθμών. Στο δεύτερο μέρος της Ανάλυσης παρουσιάζονται οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος αντιστοίχως και γίνεται χρήση των εννοιών αυτών σε πολλές εφαρμογές, ενώ γίνεται πρώτη φορά αναφορά στην έννοια του ορίου.

Στο βιβλίο έχουν παρουσιαστεί με μαθηματική αυστηρότητα οι απαραίτητοι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι έννοιες που αποτελούν τον κορμό ορισμένων κεφαλαίων, αλλά συγχρόνως έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην παρουσίαση υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων. Σε κάθε κεφάλαιο έχει γίνει προσπάθεια, ώστε ο αναγνώστης να ενημερωθεί σε βάθος για τη θεωρία και τις διάφορες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να εφοδιαστεί με τόσα πολλά λυμένα παραδείγματα, ώστε να αποκτήσει μια ευχέρεια για την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει πληθώρα άλυτων ασκήσεων για την πληρέστερη εξάσκηση του μαθητή, καθώς και ενδεικτικά προτεινόμενα διαγωνίσματα προόδου.

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα της συσσωρευμένης εμπειρίας που έχει συγκεντρώσει η πολυμελής ομάδα μαθηματικών του φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης «Ε. Δ. Στογιάννη» λόγω της πολυετούς διδασκαλίας του μαθήματος. Απευθύνεται σε μαθητές της Γ’ λυκείου. Επί πλέον, τονίζουμε εδώ ότι το παρόν σύγγραμμα αποτελεί ένα χρήσιμο και εύχρηστο βοήθημα αναφοράς για καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται είτε στο δημόσιο, είτε στον ιδιωτικό τομέα. Από παιδαγωγικής απόψεως, εκτός της προφανούς χρησιμότητας του βιβλίου αυτού, πιστεύουμε ότι δρα και αναδρομικά ως εμπέδωση κάποιων θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων, που στο παρελθόν ίσως φαίνονταν άνευ αντικειμένου.

Οι συγγραφείς

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1 - Άλγεβρα

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1. Η έννοια του μιγαδικού αριθμού

1.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (δηλαδή $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$), στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να ισχύουν οι ιδιότητές τους όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
- Ορίζεται η φανταστική μονάδα i, έτσι ώστε: $i^2 = -1$.
- Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ο αριθμός $z = \alpha + \beta i$ ονομάζεται **μιγαδικός** αριθμός.

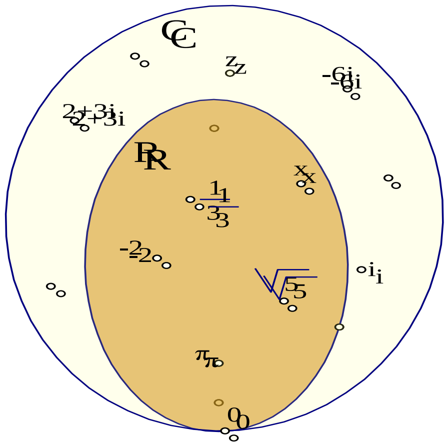
Το $\alpha \in \mathbb{R}$ ονομάζεται πραγματικό μέρος και συμβολίζεται $\mathrm{Re}(z)$, ενώ το $\beta \in \mathbb{R}$ ονομάζεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται $\mathrm{Im}(z)$.

Όταν $\mathrm{Re}(z) = 0$, τότε ο μιγαδικός παίρνει τη μορφή βi, και ονομάζεται **φανταστικός** αριθμός.

Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται I.

Προφανώς: $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{C}$

Όταν $\mathrm{Im}(z) = 0$ τότε ο μιγαδικός z είναι πραγματικός αριθμός.



Ισότητα μιγαδικών αριθμών

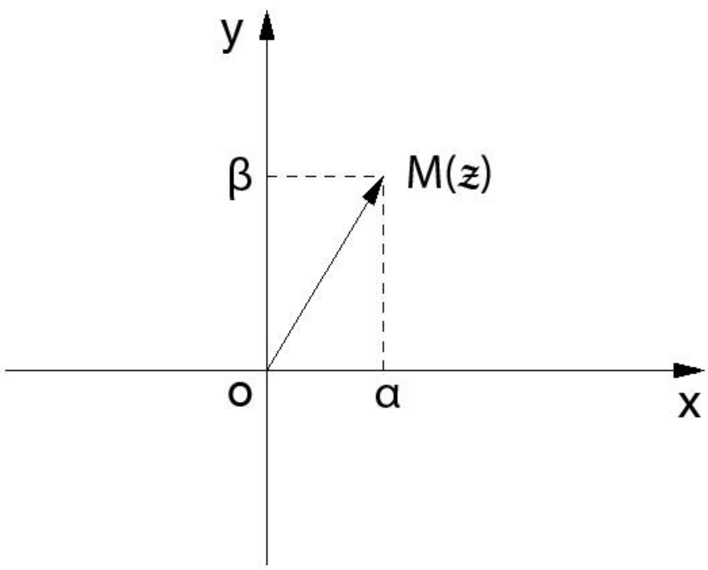
Αν $\alpha+\beta i,\ \ \gamma+\delta i$ μιγαδικοί αριθμοί, τότε : $\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \ \beta=\delta}$

Επίσης: $\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0\,.}$

Παρατήρηση: Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών δεν μεταφέρεται η διάταξη, δηλαδή δεν υπάρχει η έννοια της ανισότητας μεταξύ μιγαδικών αριθμών.

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών

Έστω Oxy σύστημα αξόνων και ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$. Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ονομάζεται **εικόνα** του z και το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ **διανυσματική ακτίνα** του z .



Τότε το σύστημα αξόνων Oxy ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο**, ο άξονας $x'x$ **πραγματικός άξονας** και ο άξονας $y'y$ **φανταστικός άξονας**.

1.2.2. Λυμένες ασκήσεις

10. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \dfrac{3+i}{i} + \dfrac{2-i}{2+i}$ και $z_2 = (x+yi)\cdot i$, $x, y \in R$.

α. Να γραφούν οι z_1, z_2 στη μορφή $\alpha + \beta i$.

β. Να βρεθούν οι x, y όταν $z_1 = \dfrac{1}{5} z_2$.

γ. Να βρεθούν οι x, y όταν $5z_1 = \bar{z}_2$.

δ. Να βρεθούν οι x, y όταν ο μιγαδικός αριθμός $u = 5z_1 + z_2$ είναι:

i. πραγματικός αριθμός.

ii. φανταστικός αριθμός.

Λύση

α. $$z_1 = \frac{3+i}{i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{(3+i)\cdot i}{i^2} + \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} = \frac{-1+3i}{-1} + \frac{4-4i-1}{4+1} =$$

$$= 1 - 3i + \frac{3-4i}{5} = \frac{5-15i+3-4i}{5} = \frac{8-19i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{19}{5}i$$

$$z_2 = (x+yi)i = -y + xi$$

β. $$z_1 = \frac{1}{5} z_2 \Leftrightarrow \frac{8}{5} - \frac{19}{5}i = \frac{1}{5}\cdot(-y+xi) \Leftrightarrow \frac{8}{5} - \frac{19}{5}i = -\frac{y}{5} + \frac{x}{5}i \Leftrightarrow$$

$$8 - 19i = -y + xi \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x = -19 \end{cases}$$

γ. $$5z_1 = \bar{z}_2 \Leftrightarrow 5\left(\frac{8}{5} - \frac{19}{5}i\right) = -y - xi \Leftrightarrow 8 - 19i = -y - xi \Leftrightarrow$$

$y = -8$ και $x = 19$

δ. $$u = 5z_1 + z_2 = 5\cdot\left(\frac{8}{5} - \frac{19}{5}i\right) + (-y+xi) = 8 - 19i - y + xi = (8-y) + (x-19)i$$

i. Αν $u \in \mathbb{R}$ τότε: $x - 19 = 0 \Leftrightarrow x = 19$ και $y \in \mathbb{R}$

ii. Αν $u \in I$ τότε: $8 - y = 0 \Leftrightarrow y = 8$ και $x \in \mathbb{R}$

1.2.3. Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρείτε τον μιγαδικό z, για τον οποίο ισχύουν:

α. $z(2+3i)=4+i$

β. $(z+1)(2-i)=3-4i$

γ. $z^2=3+4i$

δ. $(1+2i)(i-z)-(4i-3)(1-iz)=1+7i$

2. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $(i-\alpha)^2-(i+\alpha)^2+\beta+1=-i$

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{x}{2-i}+\frac{iy}{2+i}=\frac{4}{1-2i}$$

4. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ο αριθμός $z=(x+i)(2+i)^2$ είναι:

α) πραγματικός β) φανταστικός.

5. Να δείξετε ότι: $\overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)}-\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=1-\bar{z}$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$, $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.

Να δείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)=f(z)$.

(Α' Δέσμη 1993)

7. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις:

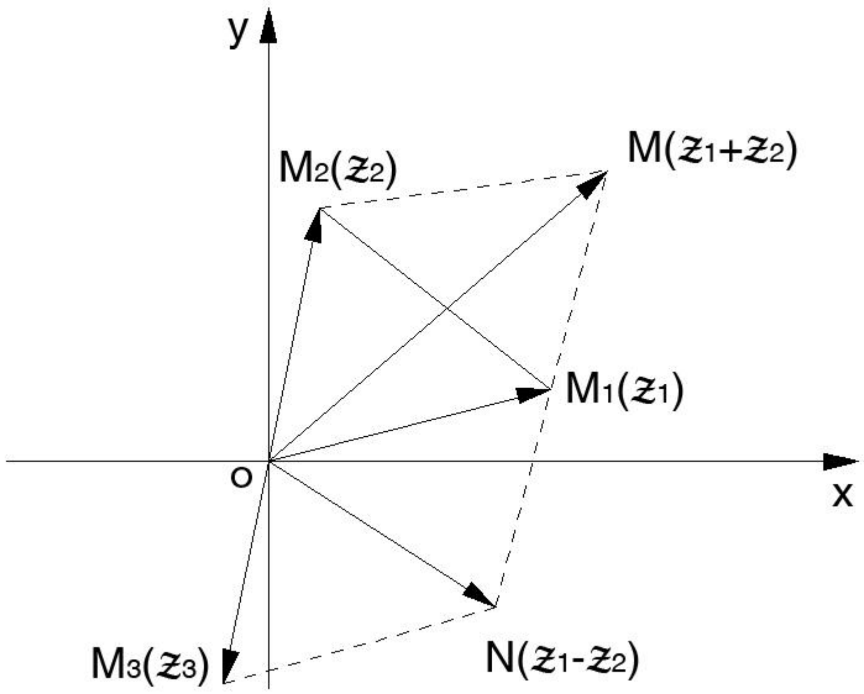
α. $z\bar{z}-2z+2\bar{z}=5-4i$

β. $z\bar{z}+2iz=12+6i$

γ. $z^2+2\bar{z}^2+z-\bar{z}+9=0$

δ. $(1+i)^2 z+5=\bar{z}+4i$

Μέτρο αθροίσματος



Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OMM_1, έχουμε:

$$\left|(OM_1)-(MM_1)\right| \le (OM) \le (OM_1)+(MM_1)$$

δηλ. $\boxed{\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|}$

Επίσης: $(ON)=(M_1M_2)$ δηλ. $|z_1-z_2|=(M_1M_2)$.

Άρα, **το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών z_1, z_2 ισούται με την απόσταση των εικόνων τους.**

1.5. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ και $z_2 = 1 + z_1$.

Να δείξετε ότι :

α. $1 + z_1 + z_1^2 = 0$

β. $z_1^3 = 1$

γ. $z_2^{2\nu} = z_1^{\nu}$ και. $z_2^{2\nu+1} = -z_1^{\nu+2}$

2. Δίνεται ο μιγαδικός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και έστω $f(z) = \frac{2z - i\bar{z}}{z-1}$, $z \neq 1$.

α. Να δείξετε ότι $f(1-i) = 3 + 3i$.

β. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\left(f(1-i)\right)^{2004}$ είναι πραγματικός αριθμός.

γ. Εστω Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών $f(1-i)$ και $f(1+i)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο.

3. Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{(1+i)^{2\nu+1}}{(1-i)^{2\nu-1}}$.

4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τον οποίο ισχύει: $z^2 + 1 = 2 \cdot |z|^2 - 2\operatorname{Im}(z) \cdot \left[\operatorname{Im}(z) - i^{109}\operatorname{Re}(z)\right]$.

5. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z , που επαληθεύουν την ισότητα: $|4z - i| = 2|\bar{z} + 1|$.

6. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και A, B οι εικόνες τους, να δείξετε ότι:

α. $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Κεφάλαιο 2 - Ανάλυση

Συναρτήσεις – Όρια-Συνέχεια

2.1. Συναρτήσεις

2.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μία διαδικασία f, μέσω της οποίας κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή ή εικόνα της f στο x και συμβολίζεται $f(x)$.

Για να εκφράσουμε, εν συντομία, τα παραπάνω γράφουμε:

$$f: \ A \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x).$$

Το **σύνολο τιμών** της f συμβολίζεται $f(A)$, δηλαδή.

$$\boxed{f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x)\ ,\ x \in A\}}$$

Μπορούμε να αντιληφθούμε την έννοια της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού A και του συνόλου τιμών $f(A)$ με τη βοήθεια του παρακάτω βελοδιαγράμματος:

Τώρα μπορούμε να απλοποιήσουμε τον τύπο της f , δηλαδή:

$$f(x)=\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-1}, \quad x\in A_f .$$

Για την g πρέπει: $(x-1)(x-2)\geq 0$ δηλ. $x\leq 1$ ή $x\geq 2$.

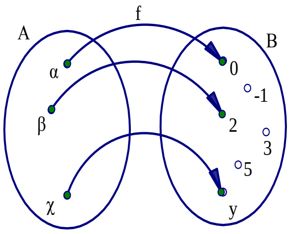
άρα: $A_g=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

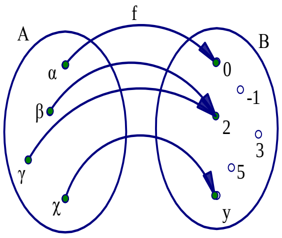
Προσοχή όμως: $g(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}\neq\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$

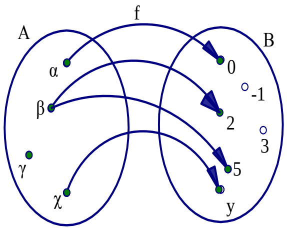
Για την $h(x)$, πρέπει: $x^2>0$ που ισχύει για κάθε $x\neq 0$, άρα: $A_h=\mathbb{R}^*$ $=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

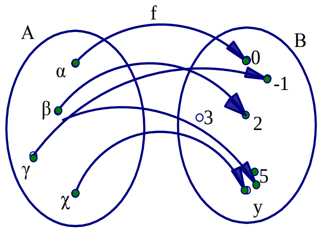
Θα ήταν όμως λάθος να γράψουμε: $h(x)=\ell n x^2=2\ell n x$, γιατί μπορεί $x<0$. Το σωστό θα ήταν: $h(x)=\ell n|x|^2=2\ell n|x|$.

Παράδειγμα: Εξετάστε αν οι παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις



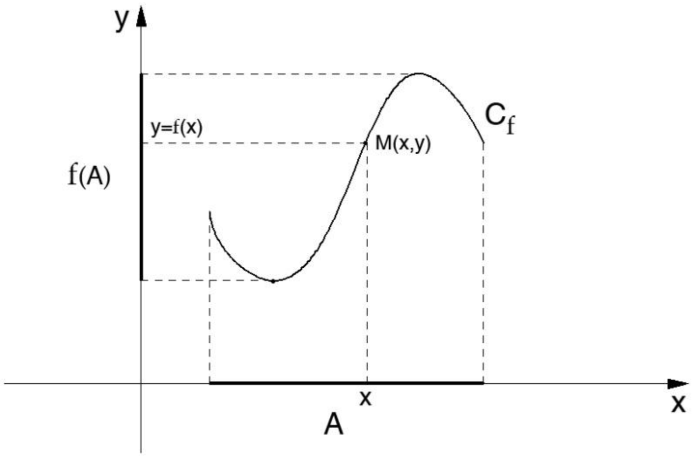






Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A\subseteq\mathbb{R}$ και Oxy σύστημα αξόνων. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$ ονομάζεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται c_f.

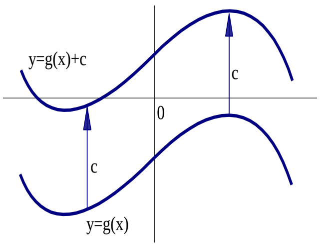


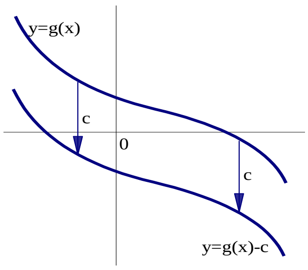
Παρατηρήσεις

• Αν είναι γνωστό το διάγραμμα της g τότε ισχύει:

i) Το διάγραμμα της συνάρτησης **f(x)=g(x)+c** , με **c>0** (αντιστοίχως **c<0**)

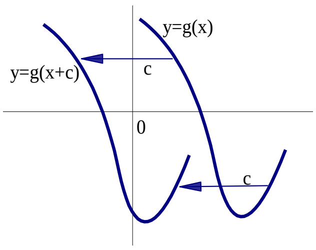
προκύπτει από τη κατακόρυφη μετατόπιση του διαγράμ- ματος της συνάρτησης g κατά c μονάδες προς τα πάνω(αντιστοίχως προς τα κάτω).

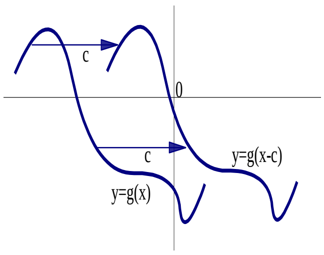




ii) Το διάγραμμα της συνάρτησης **f(x)=g(x+c),** με **c>0** (αντιστοίχως **c<0**)

προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση του διαγράμματος της συνάρτησης g κατά c μονάδες προς τα αριστερά (αντιστοίχως δεξιά)



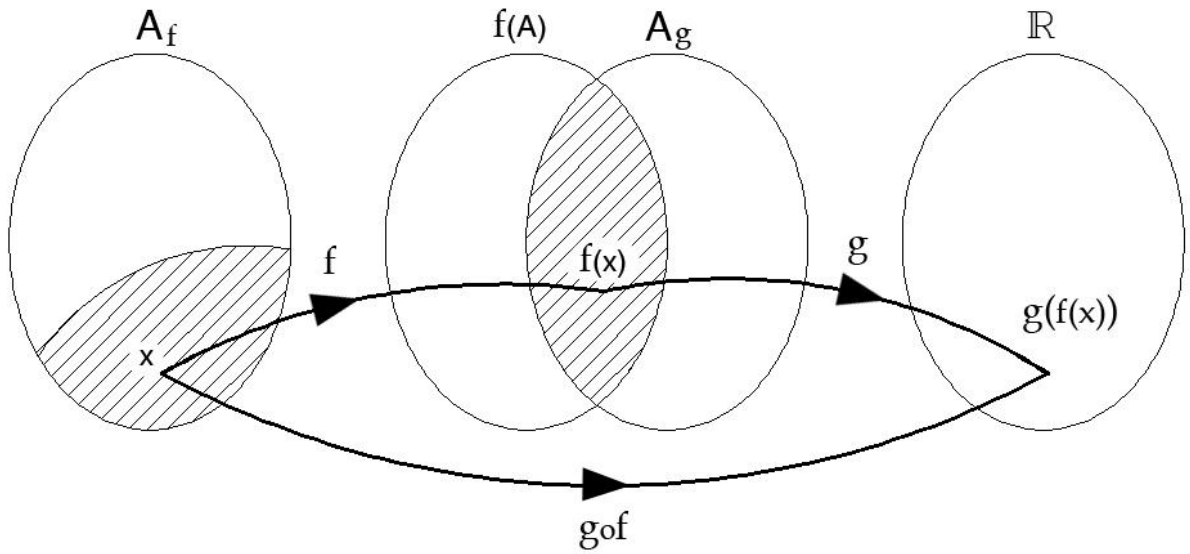


Σύνθεση συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A_f, A_g αντιστοίχως. Ονομάζουμε σύνθεση της f με την g μία νέα συνάρτηση (αν ορίζεται) με πεδίο ορισμού.

$$A = \left\{ x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g \right\} \qquad \text{και} \quad \text{τύπο} \qquad g(f(x)).$$

Η σύνθεση της f με την g συμβολίζεται gof.



Παρατηρήσεις:

- Όπως βλέπουμε, για να ορίζεται η gof πρέπει: $f(A) \cap A_g \neq \varnothing$.
- Αν ορίζονται οι gof και fog, γενικά ισχύει: $fog \neq gof$.

2.1.2. Λυμενες ασκησεις

1. Να βρεθεί η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση: $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}(1)$ για κάθε $x \neq 0$ **(Συναρτησιακές σχέσεις).**

Λύση

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$: Τότε :

Τότε η (1) γίνεται:

$$\frac{x-f(x)}{2}+2f(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2-xf(x)+4xf(x)=2$$

$$\Leftrightarrow 3xf(x)=2-x^2 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2-x^2}{3x}, \quad x \neq 0.$$

2. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ και $g(x)=x+2$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f=g$.

Λύση

$A_f=\{x \in \mathbb{R} | x-2 \neq 0|\}=\mathbb{R}-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

$A_g=\mathbb{R}$

Αφού $A_f \neq A_g$ τότε: $f \neq g$.

Περιορίζουμε τις f,g στο $A_f \cap A_g=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Τότε: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2=g(x)$

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\sqrt{1-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

Λύση

$A_f=\{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}=[0,+\infty)$ $\qquad$ $A_g=\{x \in \mathbb{R}/1-x \geq 0\}=(-\infty,1]$.

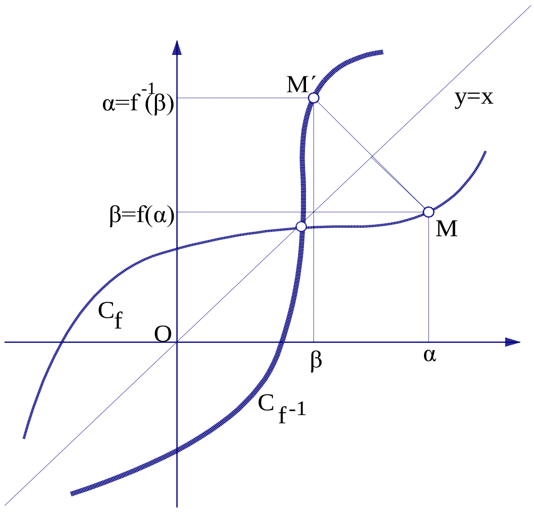
Παρατηρήσεις

- Από τον ορισμό προκύπτει ότι:

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x\,, \quad x \in A} \text{ και } \boxed{f(f^{-1}(y)) = y\,, \quad y \in f(A)}$$

- Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού A της f.

- Αν το σημείο $A(x, y)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο $A'(y, x)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Συνεπώς οι c_f, $c_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Έτσι αν η c_f τέμνει την $y = x$ σε σημείο M, τότε και η $c_{f^{-1}}$ τέμνει την $y = x$ στο M και αντιστρόφως.



(Κάποιες περιττές και γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις, όπως η $f(x) = -x^3$ έχουν γραφική παράσταση που έχει κοινά σημεία με την $c_{f^{-1}}$ στην ευθεία $y = -x$).

- Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της A, τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο $f(A)$, διατηρώντας το ίδιο είδος μονοτονίας.

$$\frac{-x^3+2x+4}{5}=x \Leftrightarrow -x^3+2x+4=5x \Leftrightarrow x^3+3x=4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0$$

$\boxed{x=1}$ ή $x^2+x+4=0$ (αδύνατη)

οπότε το μοναδικό κοινό σημείο των c_f, $c_{f^{-1}}$ είναι το $(1,1)$.

2.2.3. Άλυτες ασκήσεις

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων και να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας γραφικά:

α. $f(x)=-x^3+2$ β. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ γ. $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x^2, & x\geq 0 \end{cases}$

δ. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -2x+3, & x\geq 0 \end{cases}$

2. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(x)=-3|x|+4$ β. $f(x)=5x-3$, $x\in[-1,3)$ γ. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

3. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να προσδιορίσετε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(x)=-2|x-1|+3$ β. $f(x)=\begin{cases} -x^2+2, & -1<x<0 \\ x^2, & 0\leq x<\sqrt{2} \end{cases}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-2x$ με $0<\alpha<1$.

α. Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

β. Να λυθεί η ανίσωση : $\alpha^{\lambda-1}-\alpha^{999}>2\lambda-2000$.

5. Να λυθεί η ανίσωση $f(2x^2-x+3) < f(3x+x^2)$, όταν $f(x) = e^x+x$

2.3. Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

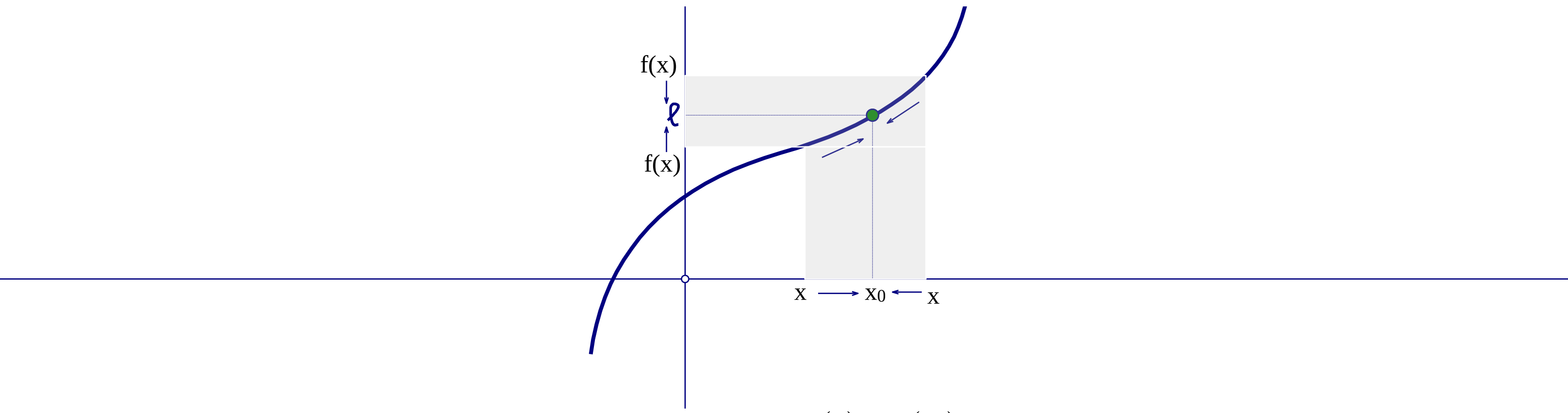
2.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$, καθώς οι τιμές του x πλησιάζουν το x_0 όσο κοντά θέλουμε και με οποιονδήποτε τρόπο, τότε λέμε ότι:

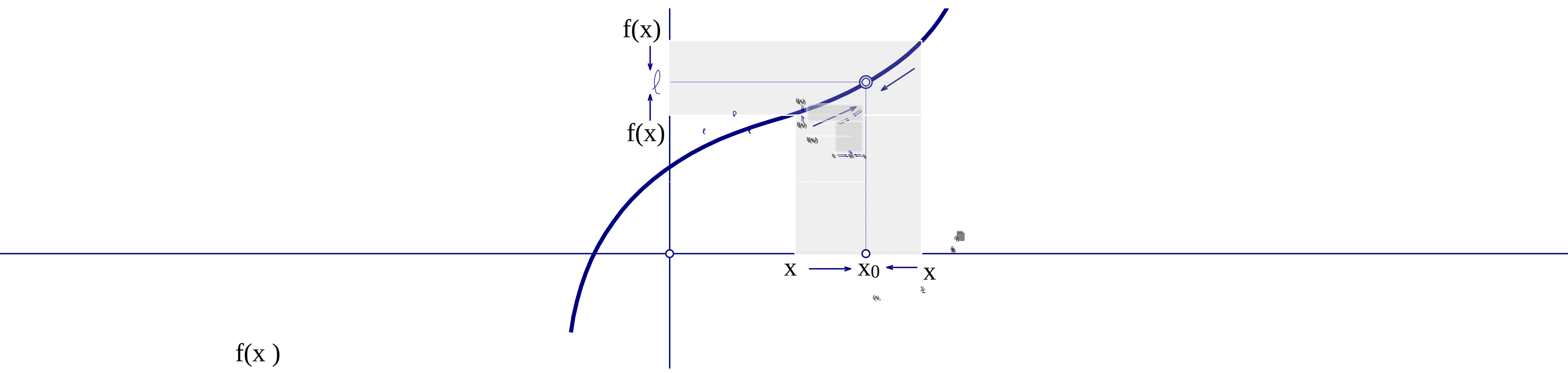
Το όριο της f στο x_0, είναι ℓ και γράφουμε: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell}$

- Το x_0 ονομάζεται σημείο συσσώρευσης και μπορεί ν' ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, μπορεί και να μην ανήκει σ' αυτό.
- Γενικά, για να αναζητήσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ πρέπει η f να ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο x_0, δηλαδή σε σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (a,x_0) ή (x_0,β).
- Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (αν υπάρχει) μπορεί να είναι ίσο με την τιμή $f(x_0)$, μπορεί και όχι.

Τα παραπάνω ερμηνεύονται γραφικά στα παρακάτω σχήματα:



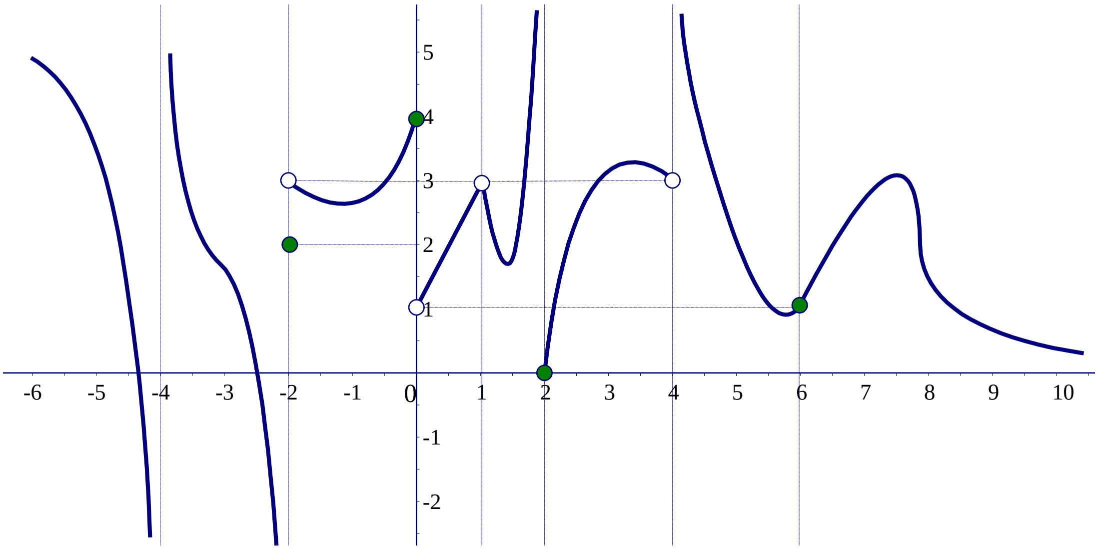
$$x_0 \in A_f\ ,\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$



$$x_0 \notin A_f\ ,\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

2.5.3. Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα όρια και τα πλευρικά όρια (αν υπάρχουν) στην παρακάτω γραφική παράσταση, στα σημεία x_0= - 4 , -2 , 0 , 1 , 2 , 4 , 6 .



2. Να βρείτε, εφ' όσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-5x}{3(x-2)^2}$ β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x+12}{x^2-6x+9}$ γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x\text{-}1}}$

δ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x^3}$ ε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}\text{-}2}{(x\text{-}1)^3}$ στ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{\text{συν}x-1}$

ζ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x+3|-7}{x^2-9}$ η. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^3+2x^2}$ θ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-2x}{\text{ημ}x}$

ι. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-2x}{\text{ημ}x}$ ια. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+3)\text{ημ}x}{x^3}$ ιβ. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^2}$

ιγ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-1|+2x}{|x-2|\cdot(x+2)}$ ιδ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2(x+1)}$ ιε. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}$

3. α.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$.

β.Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$

(Πανελλήνιες 1981)

2.8.3. Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα όρια της στήλης Α με την τιμή του της στήλης Β.

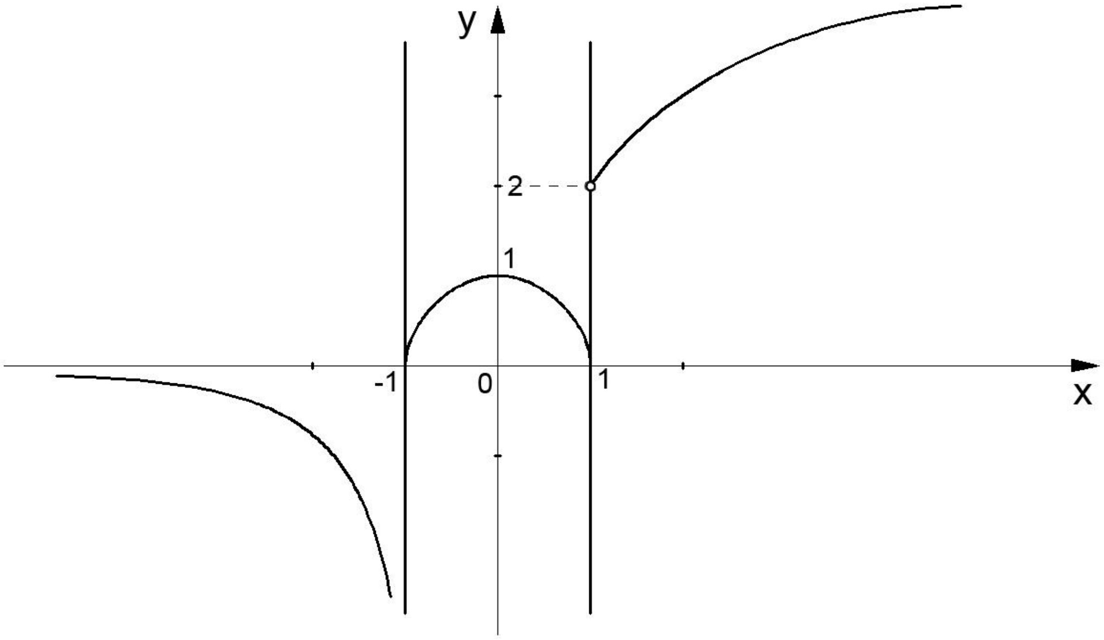
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}$	α. $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(xημ\dfrac{1}{x}\right)$	β. 0
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell nx$	γ. 1
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{e^x}$	δ. $+\infty$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-2x}+3x$, $\varphi(x)=\ell n(2-x)-2$ και $h(x)=\dfrac{e^{2x}}{\ell nx}$.

Να αντιστοιχίσετε τα όρια:

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	α. $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-}\varphi(x)$	β. 0
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$	γ. 1
	δ. 2
	ε. $+\infty$
	στ. e

3. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f. Να αντιστοιχίσετε τα όρια της στήλης Α με την σωστή τιμή της στήλης Β.



Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$	α. 0
2. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{1}{f(x)}$	β. 1
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{xf(x)}$	γ. $+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$	δ. 2
5. $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)+\ln x]$	ε. $-\infty$
6. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{f(x)\ln x}$	
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(f(x)\ln x)$	

2.9. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-3}{x-1}$

γ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x^2+4x+2}}$

δ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\eta\mu\left(x-1\right)}{\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x}{2}}$

ε. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x}$

στ. $\lim\limits_{x\to a}\left(a^2-x^2\right)\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2a}$

ζ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu 2x}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$

η. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt{x^2+3}-6}{x-1}$

θ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\eta\mu^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{6x-\pi}$

ι. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\eta\mu x}$

2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\eta\mu(ax)}=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)f(x)\right]=2$, να βρεθεί το $a\in\mathbb{R}^*$, αν $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=27+a^2$.

3. Αν $f(x)=\dfrac{a|x+2|+\beta|x-4|-2}{x^2-5x+6}$, να βρείτε τις τιμές των $a,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=10$.

4. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=3$, να βρείτε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-2}{x-1}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)+\sqrt{x}-3}{x^2-1}$

5. Αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2+\eta\mu^2 x}=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}-1}{g(x)}=\dfrac{1}{8}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Βιβλιογραφία

1. G. Aligniac, Themes Mathematiques, Montpellier (nouvelle collection), 1993, εκδόσεις Αίθρα.
2. Α. Μπάρλας, Μαθηματικά Γ΄ λυκείου, 2014, Ελληνοεκδοτική.
3. Α. Σκύφας, Π. Γιαννάκος, Δ. Ανδριώτης, Ε Σαρρή, Επαναληπτικά θέματα Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, 2014, Εκδόσεις Έναστρον.
4. Β. Γατσινάρης, Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης (μέρος α΄) (Β΄ έκδοση), 2013, εκδόσεις Πατάκη.
5. Β. Γατσινάρης, Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, μέρος β΄ (αναμορφωμένη έκδοση), 2014, εκδόσεις Πατάκη.
6. Β.Γ. Παπαδάκης, Μαθηματικά Γ΄ λυκείου, 2013, Εκδόσεις Σαββάλας.
7. Β.Γ. Παπαδάκης, Η επανάληψη Μαθηματικά Γ΄Λυκειου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2013, Εκδόσεις Σαββάλας.
8. Γ. Βρύζας, Χ. Κωσταντόπουλος, Α. Μαναρίδης, Μαθηματικά Γ λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, τεύχος 1, 2011, εκδόσεις Ξιφαράς.
9. Γ. Βρύζας, Χ. Κωσταντόπουλος, Α. Μαναρίδης, Μαθηματικά Γ λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, τεύχος 2, 2011, εκδόσεις Ξιφαράς.
10. Γ. Μπαραλός, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου.
11. Γ. Μπαϊλάκης, Το 4ο Θέμα των Μαθηματικών, 2002, Εκδόσεις Σαββάλας.
12. Δ. Τσεκούρας, συλλογή επαναληπτικών θεμάτων θετικής-τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2008, Εκδόσεις Τσεκούρα.
13. Ε. Τόλης, Σ. Μιχαήλογλου, Μαθηματικά Γ΄ λυκείου, 2013, Εκδοτικός Οίκος Α. Α. Λιβάνη.
14. Η. Κωνσταντόπουλος, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 2002, Εκδόσεις Γκρίτζαλης.
15. Κ. Γιαννιτσιώτης, Α. Καραγεώργος, θεώρημα Fermat-Rolle, 2000, Εκδόσεις Κωστόγιαννος.
16. Κ. Γιαννιτσιώτης, Α. Καραγεώργος, θεώρημα Μέσης τιμής διαφορκού λογισμού και συνέπειες, 2000, Εκδόσεις Κωστόγιαννος.
17. Κ. Γκατζούλης, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 2008, Εκδόσεις Γκατζούλη.

18. Κ. Τζιρώνης, Θ. Τζουβάρας, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 1999, Εκδόσεις Σαββάλας.
19. Ν. Σκομπρής, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, β΄ τεύχος, 2014, Εκδόσεις Σαββάλας.
20. Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Μαθηματικά Β- Γ' Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, 2012, ΟΕΔΒ.
21. Τ. Τσούχλης, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, 2003, Εκδόσεις Σαββάλας.
22. Χ.Κ. Αχτσαλωτίδης, Μαθηματικά, ανάλυση Γ΄ ενιαίου λυκείου, 2006, Μεταίχμιο.
23. Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου, Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2012, Εκδόσεις Σαββάλας.
24. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδος.
25. Περιοδικά Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας από 1998 – 2015.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
Ασπασίας 76-78, Χολαργός Τηλ. 210 6512099
e-mail: stogiannis@stogiannis.edu.gr
www.stogiannis.edu.gr