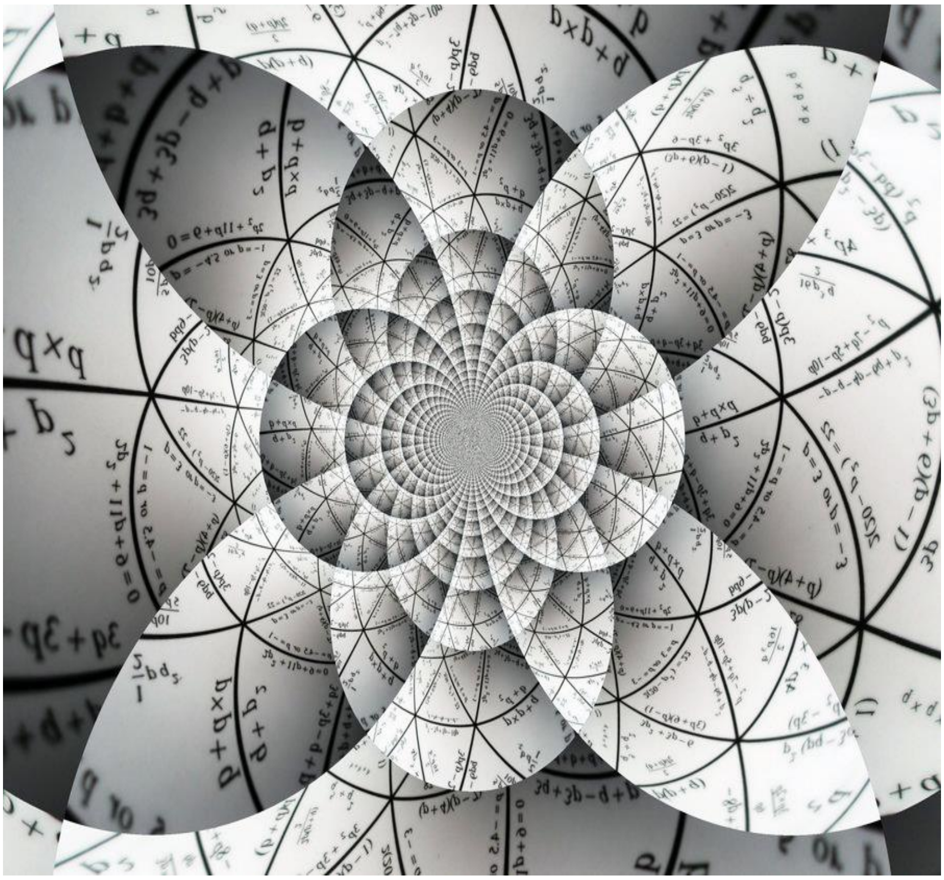
Ν. ΤΣΟΥΡΜΑΣ Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
Π. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ Β. ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ
Γ. ΒΑΡΔΑΚΑΣΤΑΝΗΣ Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πρόλογος

Η Άλγεβρα (προέρχεται από την Αραβική λέξη *al-jebr* που σημαίνει «επανένωση των σπασμένων μερών») είναι ο κλάδος της επιστήμης (σύνθετος τομέας ειδικοτήτων) με αντικείμενο την εύρεση λύσεων σε ρεαλιστικά προβλήματα της καθημερινότητας. Αποτελεί έναν από τους ευρύτερους τομείς των μαθηματικών, μαζί με τη θεωρία αριθμών, τη γεωμετρία και την ανάλυση. Περιλαμβάνει τα πάντα από την επίλυση στοιχειωδών εξισώσεων μέχρι και τη μελέτη ανώτερων ασαφών εννοιών όπως οι ομάδες και τα πεδία. Η στοιχειώδης άλγεβρα μας εφοδιάζει με τα βασικά εργαλεία και είναι απαραίτητη τόσο για την περαιτέρω μελέτη οποιουδήποτε πεδίου των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Μηχανικής όσο και για την ανάπτυξη εφαρμογών σε επιστήμες όπως η Ιατρική και τα Οικονομικά.

Ιστορικά, πολύ ενδιαφέρουσα είναι η ραγδαία εξέλιξη του κλάδου της Άλγεβρας, από τα πρώτα χρόνια της εξέλιξης της ανθρωπότητας μέχρι σήμερα. Οι ρίζες της εντοπίζονται στους αρχαίους Βαβυλώνιους, οι οποίοι ανέπτυξαν ένα σύνθετο αριθμητικό σύστημα προκειμένου να κάνουν πράξεις με ένα αλγοριθμικό τρόπο. Οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων σε σχέση με αυτές που χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι (ο μαθηματικός πάπυρος του Ριντ), οι Έλληνες (Ευκλείδεια Γεωμετρία) και οι Κινέζοι μαθηματικοί (9 κεφάλαια στη τέχνη των Μαθηματικών), οι οποίοι έδιναν κυρίως γεωμετρικές μεθόδους επίλυσης για τα ίδια προβλήματα.

Η αρχή της Άλγεβρας ως ξεχωριστό πεδίο των μαθηματικών μπορεί να εντοπιστεί κατά το τέλος του 16ου αιώνα με το έργο του François Viète. Το 1637, ο René Descartes με το έργο του «La Géométrie», έθεσε την έννοια της αναλυτικής Γεωμετρίας και εισήγαγε τους σύγχρονους μαθηματικούς συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται σήμερα στην Άλγεβρα. Η ιδέα της ορίζουσας αναπτύχθηκε από το Γιαπωνέζο μαθηματικό Kowa Seki το 17ο αιώνα, ενώ και ο Gottfried Leibniz προχώρησε ανεξάρτητα σε παρόμοια ανακάλυψη δέκα χρόνια μετά. Η έννοια της μετάθεσης, η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα στη Θεωρία Πιθανοτήτων, μελετήθηκε από το Joseph-Louis Lagrange το 1770. Μέχρι και το 19ο αιώνα, η Άλγεβρα αποτελείτο κυρίως από τη θεωρία των εξισώσεων.

Στο βιβλίο "Άλγεβρα Β' λυκείου" θα παρουσιάσουμε σε βάθος την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Β' τάξης του Γενικού Λυκείου. Αρχικά γίνεται μία παρουσίαση των γραμμικών συστημάτων που είναι ήδη γνωστά στον μαθητή από τα προηγούμενα χρόνια και εισάγεται η χρήση της ορίζουσας για την επίλυση τέτοιων συστημάτων. Επιλύονται γραμμικά συστήματα με τρείς αγνώστους, καθώς και μη γραμμικά συστήματα. Στη συνέχεια εξετάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεων (μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες, οριζόντια μετατόπιση, κατακόρυφη μετατόπιση). Παρουσιάζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, καθώς και η διαδικασία επίλυσης των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων. Επίσης, γίνεται μελέτη των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος τόξων και του μετασχηματισμού του αθροίσματος σε γινόμενο. Τέλος, παρουσιάζονται οι νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων με εφαρμογή στην επίλυση τριγώνων και στη σύνθεση δυνάμεων. Στο επόμενο κεφάλαιο τίθενται οι βάσεις για μια πιο συστηματική μελέτη των πολυωνύμων και αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων. Στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου εισάγονται η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση.

Στο βιβλίο έχουν παρουσιαστεί με μαθηματική αυστηρότητα οι απαραίτητοι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι έννοιες που αποτελούν τον κορμό ορισμένων κεφαλαίων, αλλά συγχρόνως έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην παρουσίαση υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων. Σε κάθε κεφάλαιο έχει γίνει προσπάθεια, ώστε ο αναγνώστης να ενημερωθεί σε βάθος για τη θεωρία και τις διάφορες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να εφοδιαστεί με τόσα πολλά λυμένα παραδείγματα, ώστε να αποκτήσει μια ευχέρεια για την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει πληθώρα άλυτων ασκήσεων για την πληρέστερη εξάσκηση του μαθητή, καθώς και ενδεικτικά προτεινόμενα διαγωνίσματα προόδου.

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα της συσσωρευμένης εμπειρίας που έχει συγκεντρώσει η πολυμελής ομάδα μαθηματικών του φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης «Ε. Δ. Στογιάννη» λόγω της πολυετούς διδασκαλίας του μαθήματος της Άλγεβρας για την δεύτερη τάξη του λυκείου. Απευθύνεται σε μαθητές της Β' λυκείου. Επί πλέον, τονίζουμε εδώ ότι το παρόν σύγγραμμα αποτελεί ένα χρήσιμο και εύχρηστο βοήθημα αναφοράς για καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται είτε στο δημόσιο, είτε στον ιδιωτικό τομέα. Από παιδαγωγικής απόψεως, εκτός της προφανούς χρησιμότητας του βιβλίου αυτού, πιστεύουμε ότι δρα και αναδρομικά ως εμπέδωση κάποιων θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων, που στο παρελθόν ίσως φαίνονταν άνευ αντικειμένου.

Ιδιαίτερη προσπάθεια έχει γίνει να τονιστεί η σχέση μεταξύ του μαθηματικού φορμαλισμού και της φυσικής διαίσθησης, να φανεί καθαρά στο μαθητή και το δάσκαλο η συμπληρωματικότητα μεταξύ θεωρίας και εφαρμογών. Οι προυπάρχουσες γνώσεις των μαθητών εντάσσονται σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, με στόχο την επέκταση και εμβάθυνσή τους. Διερευνώνται προβλήματα και αναπτύσσονται στρατηγικές επίλυσης τους με στόχο να αναπτυχθούν διάφοροι τρόποι σκέψης ώστε τα Μαθηματικά να μετατραπούν σε εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.

Το βιβλίο αυτό είναι αυτοδύναμο, με την έννοια ότι δε χρειάζεται αναφορά σε άλλα βοηθητικά βιβλία. Επίσης, τα προαπαιτούμενα είναι τρία χρόνια βασικών μαθηματικών των τάξεων του γυμνασίου καθώς και η γνώση της Άλγεβρας της πρώτης τάξης του λυκείου. Τα περισσότερα κεφάλαια και μέρη κεφαλαίων είναι σχετικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και ακολουθούν πιστά τη διδακτέα ύλη του σχολικού βιβλίου. Αυτό, εκτός από την ευελιξία που παρέχει για διάφορα προγράμματα διδασκαλίας, έχει και προφανή παιδαγωγική σκοπιμότητα.

Οι συγγραφείς

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Συστήματα

1.1. Γραμμικά Συστήματα

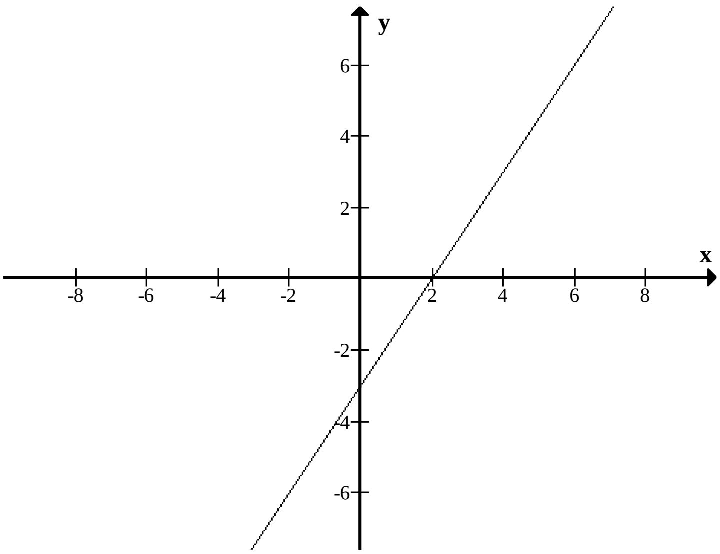
1.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Γραμμικό σύστημα 2x2

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ ονομάζεται **γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους** και παριστάνει ευθεία.

Κάθε διατεταγμένο ζεύγος $\left(x_0,y_0\right)$ που επαληθεύει την εξίσωση αποτελεί λύση της και το σημείο Α$\left(x_0,y_0\right)$ ανήκει στην ευθεία.

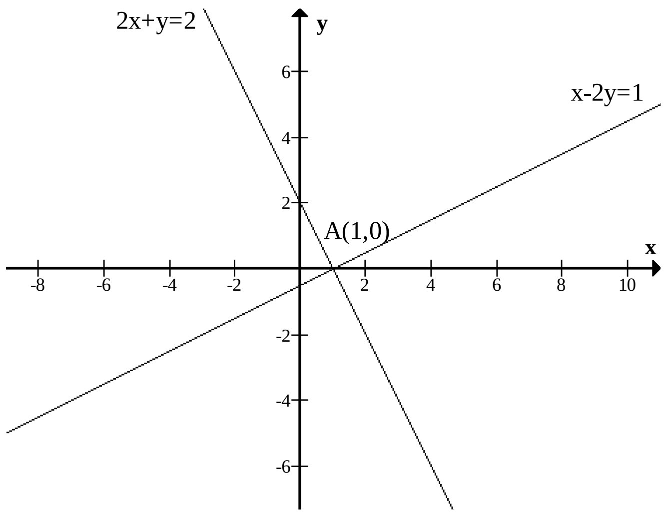
Παράδειγμα, η εξίσωση $3x-2y=6$ και το σημείο της Α(2,0).



Αν $\alpha=0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και έχει εξίσωση της μορφής $y=\kappa$.

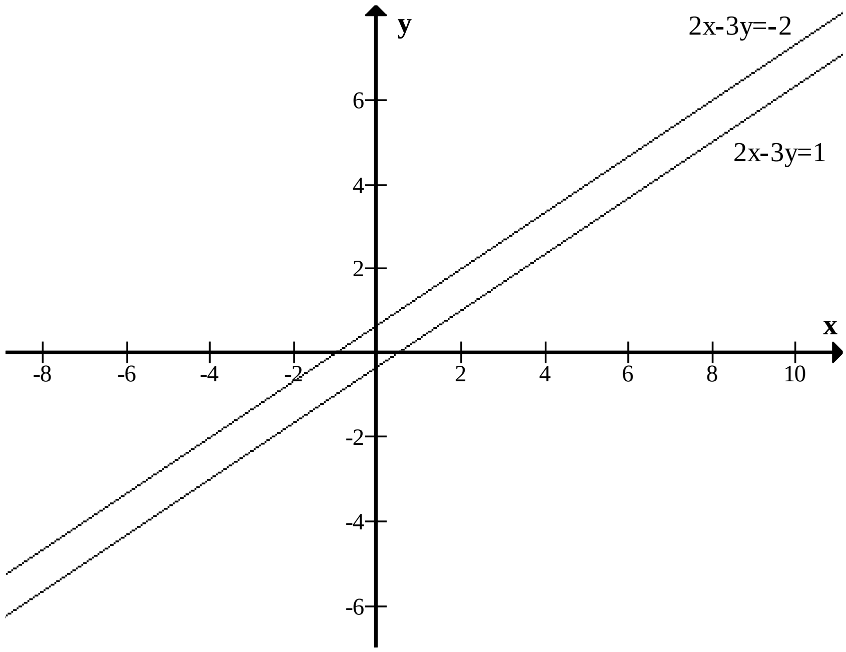
Παράδειγμα: Το κοινό σημείο των ευθειών με εξισώσεις $x-2y=1$ και $2x+y=2$ είναι το Α(1,0) ή με άλλα λόγια η μοναδική λύση του συστήματος $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ είναι: $x=1,\ y=0$.

Προφανώς οι τιμές αυτές επαληθεύουν τις δύο εξισώσεις.



II. Οι ευθείες να είναι παράλληλες. Τότε το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι **αδύνατο**.

Παράδειγμα: Το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=-2 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$.



1.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}+y=8 \\ \dfrac{y-1}{6}+x=6 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=1 \\ \dfrac{2x+4y}{5}-\dfrac{x-y}{3}=-2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}-\dfrac{y+2}{3}=1 \\ \dfrac{1-x}{3}-\dfrac{1-y}{5}=-1 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} \dfrac{x-2y+8}{3}+\dfrac{x+y-6}{2}=\dfrac{x+4}{3} \\ x-3y=\dfrac{3x}{4}-5 \end{cases}$

στ) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}-\dfrac{y+3}{3}+x-\dfrac{5}{2}=6y+2 \\ \dfrac{3x}{5}+\dfrac{y+1}{2}-4=2-\dfrac{y}{10} \end{cases}$

ζ) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{2y-3}{4}+y=5+\dfrac{x}{3}-1 \\ \dfrac{2x}{3}-4y+\dfrac{1}{2}=4+x+\dfrac{2y}{5} \end{cases}$

η) $\begin{cases} \dfrac{5(x-2)}{3}-\dfrac{3(1-2y)}{9}=2(x-y) \\ \dfrac{2x+3y}{4}-\dfrac{x-y}{2}=2+x \end{cases}$

θ) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=x^2+y^2 \\ \dfrac{5(y-3x)}{2}-\dfrac{3(x-3y)}{4}=-1 \end{cases}$

3. Ποια συστήματα παριστάνουν τα παρακάτω σχήματα;

1.2. Μη γραμμικά συστήματα

1.2.1. Στοιχεία θεωρίας

Σε πολλές περιπτώσεις συστημάτων μπορεί κάποια από τις εξισώσεις ή και όλες να μην είναι γραμμικές.

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα κοινά σημεία του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = $\sqrt{5}$ με την υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{2}{x}$.

Λύση

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο O(0,0) και ακτίνα ρ = $\sqrt{5}$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$, άρα για να βρούμε τα κοινά σημεία του κύκλου και της υπερβολής, πρέπει να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$

Άρα:

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

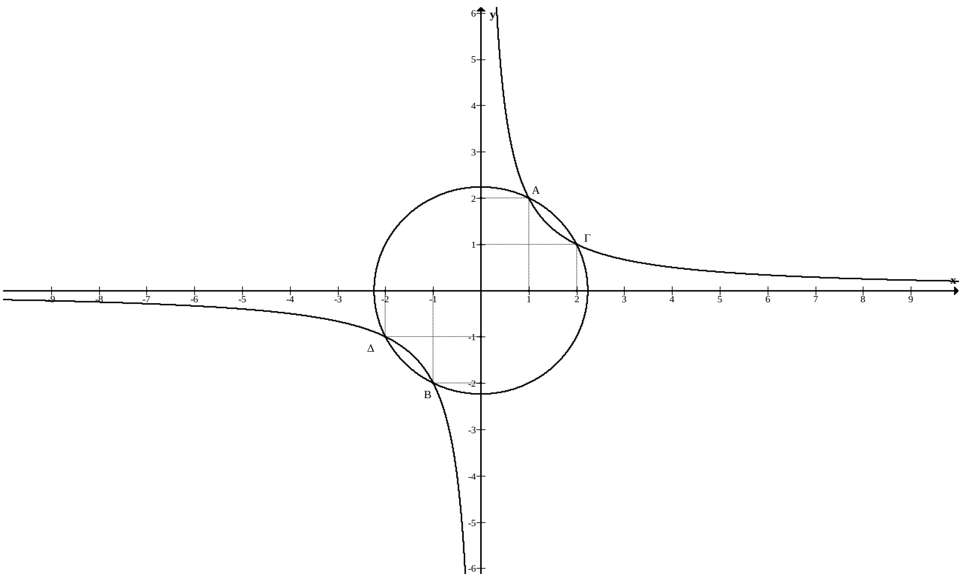
που είναι μια **διτετράγωνη** εξίσωση, που λύνεται θέτοντας όπου $x^2 = \omega$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$, της οποίας λύσεις είναι το 1 και το 4.

Συνεπώς: $x^2 = 1$ ή $x^2 = 4$, οπότε:

$$x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

Άρα τα κοινά σημεία του κύκλου και της υπερβολής είναι: Α(1,2), Β(-1,-2), Γ(2,1), Δ(-2,-1).

Οι λύσεις του συστήματος παριστάνονται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



1.2.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x - y^2 = -5 \\ x - y = -2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 36 \\ x - y = 8 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$

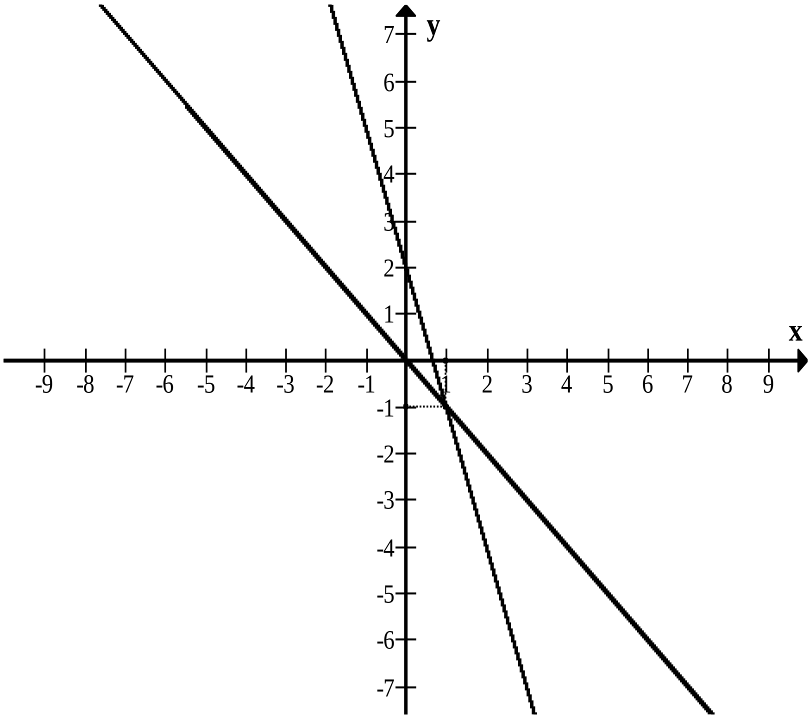
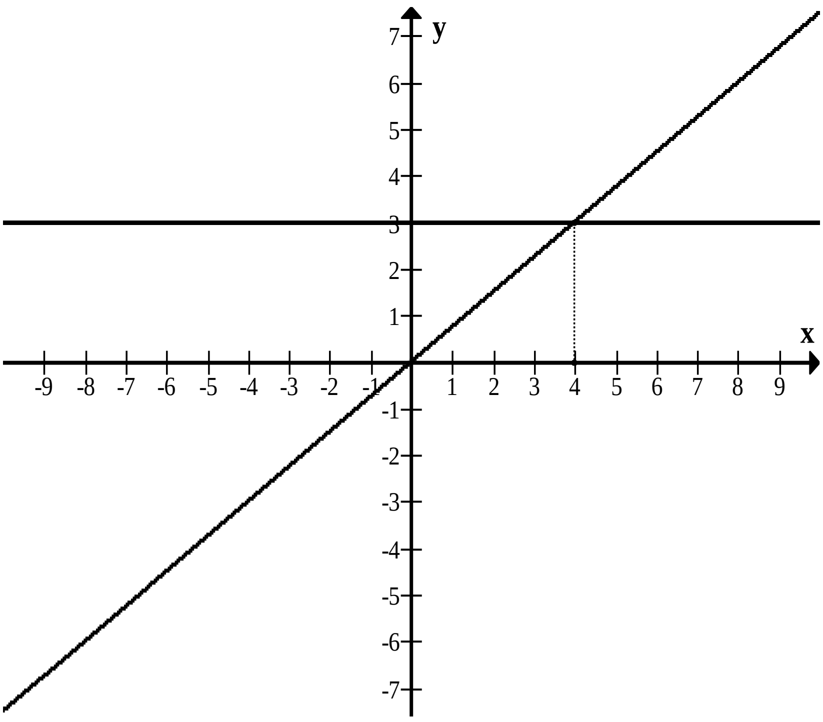
δ) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 2 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 3x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x + y + xy = -7 \\ xy\left(x + y\right) = 6 \end{cases}$

2. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας με εξίσωση $2x - y = 1$ και της παραβολής $y = x^2$. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα γραφικά.

3. Να βρεθούν τα κοινά σημεία του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 5\sqrt{13}$ και της ευθείας με εξίσωση $x + y = 25$.

4. Να βρείτε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει διαγώνιο 20 cm και εμβαδόν 192 cm^2.

III. Να αντιστοιχίσετε το σχήμα της στήλης Α με το σωστό σύστημα της στήλης Β:

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	α. $\begin{cases} y = x \\ y = -3x + 2 \end{cases}$ β. $\begin{cases} y = 3 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$
2. 	γ. $\begin{cases} y = -x \\ y = -3x + 2 \end{cases}$ δ. $\begin{cases} y = x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$

Κεφάλαιο 2

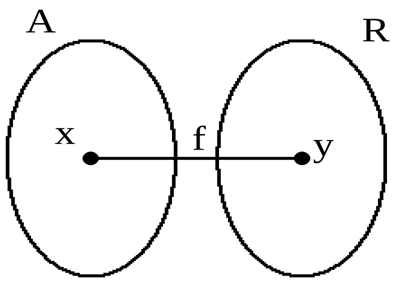
Ιδιότητες συναρτήσεων

2.1. Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης

2.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Συναρτήσεις (Επανάληψη)

Ορισμός: Συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται μια διαδικασία (κανόνας) μέσω της οποίας σε κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$, αντιστοιχεί ένας και μόνο πραγματικός αριθμός y.



Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, συνήθως γράφεται συμβολικά:

$$\begin{aligned} f &: \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Για να είναι σωστά ορισμένη μια συνάρτηση πρέπει να γνωρίζουμε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=2x^2-1$ και πεδίο ορισμού $\mathrm{A}=\{-1,0,1\}$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

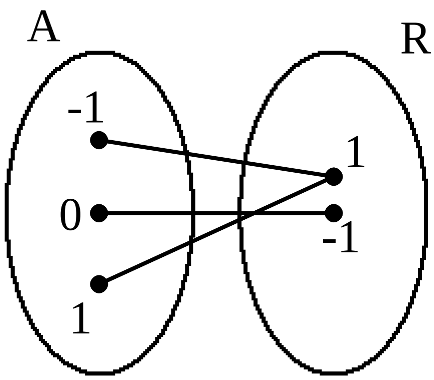
Απάντηση

Βρίσκουμε την τομή της f για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

Δηλαδή:

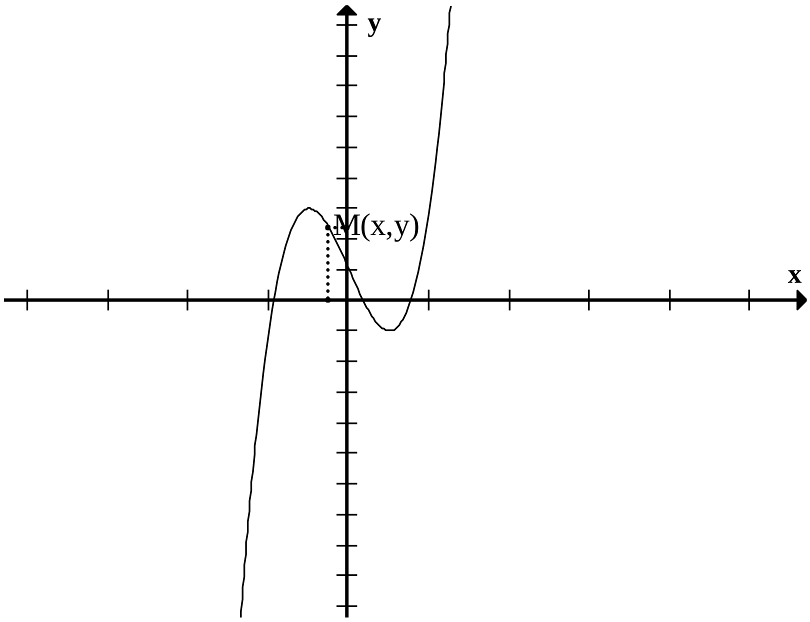
$$f(-1)=2(-1)^2-1=1,\quad f(0)=2\cdot 0^2-1=-1 \text{ και } f(1)=2\cdot 1^2-1=1.$$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(\mathrm{A})=\{-1,1\}$



Γραφική παράσταση συνάρτησης

Δίνεται συνάρτηση f και ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy. Το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $f(x)=y$ ονομάζεται γραφική παράσταση της f.



Παρατηρήσεις

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ (αν υπάρχουν) λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα.

β) Για να βρούμε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ (αν υπάρχει), θέτουμε όπου $x=0$ στον τύπο της συνάρτησης και η τιμή που προκύπτει είναι η τεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα. Προφανώς το 0 πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Προσοχή: Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε περισσότερα του ενός, σημεία, αλλά τον άξονα $y'y$ το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f,g, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. Οι λύσεις της εξίσωσης (αν υπάρχουν) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

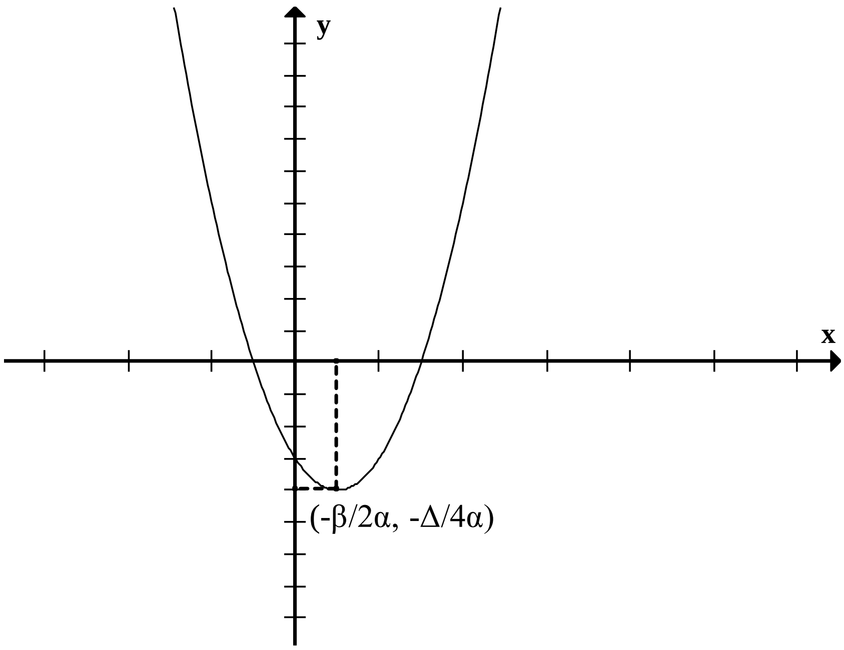
IV. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι το $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση είναι **παραβολή.**

1η περίπτωση:

Όταν $\alpha>0$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

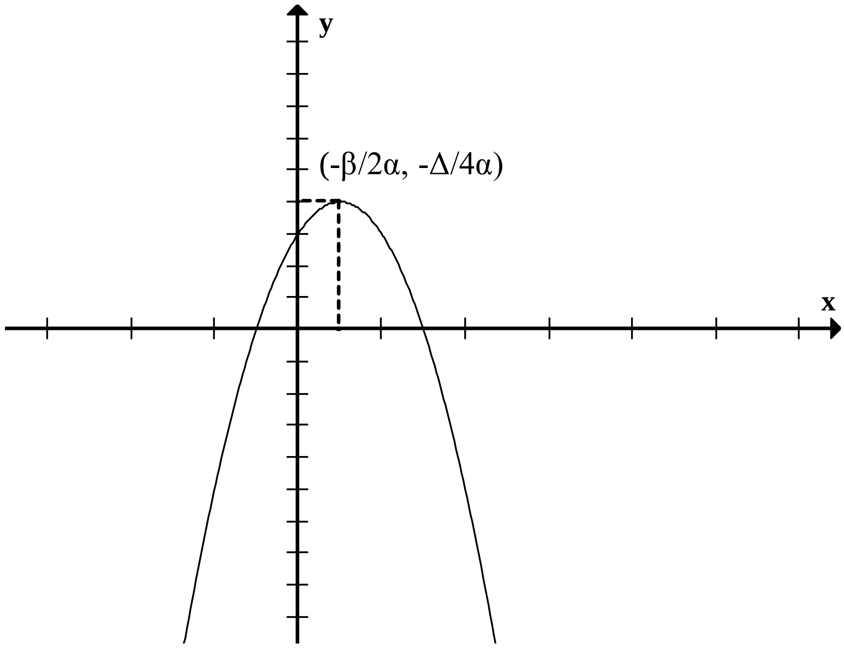
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



2η περίπτωση:

Όταν $\alpha<0$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$



2.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-5x^2+1$.

Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 4x-1, & x\geq 1 \\ -x^2+2x, & x<1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(1)$ και $f\left(\frac{5}{4}\right)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x+5, & x\leq 2 \\ x^2+\beta x, & x>2 \end{cases}$.

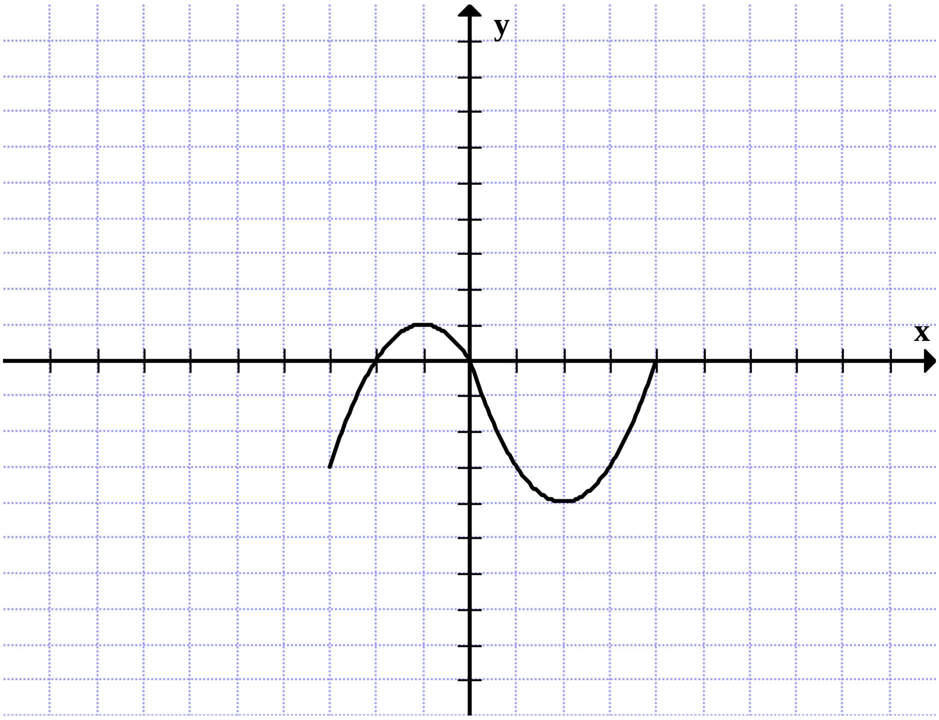
Αν $f(-1)=3$ και $f(5)=10$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $t(x)=f(x-c)$, $c>0$ προκύπτει από μια παράλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

2.2.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται η παρακάτω γραφική παράσταση συνάρτησης f .



Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $f(x)+3$ β) $f(x-2)$ γ) $f(x-2)+3$

δ) $f(x)-2$ ε) $f(x+1)$ στ) $f(x+1)-2$

Κεφάλαιο 3

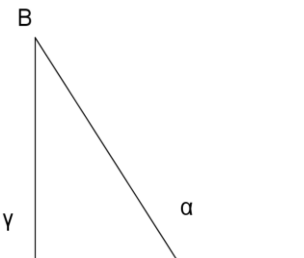
Τριγωνομετρία

3.1. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

3.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Τριγωνομετρικός κύκλος

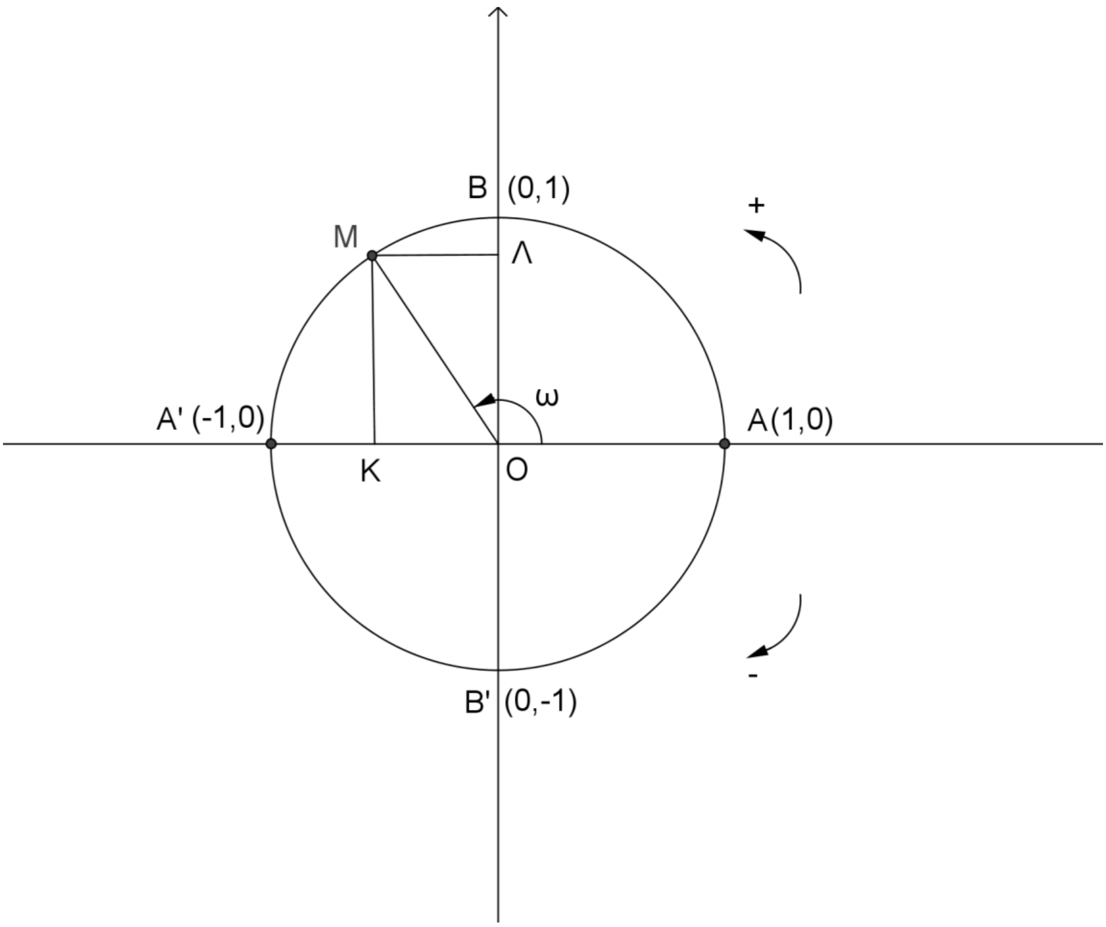
Γνωρίζουμε, ήδη, από το Γυμνάσιο πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο.



$$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$



Η χρησιμότητα του τριγωνομετρικού κύκλου είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε θετικής ή αρνητικής γωνίας ω, που έχει πάντοτε ως αρχική πλευρά την ακτίνα ΟΑ και τελική την ΟΜ.

Εδώ, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ΟΜ είναι η τελική πλευρά απείρων γωνιών, που διαφέρουν κάθε μία από την επόμενη ή την προηγούμενη κατά 360^0, είτε κινούμαστε κατά τη θετική είτε κατά την αρνητική φορά.

Οι μονάδες μέτρησης του γωνιών του τριγωνομετρικού κύκλου είναι:

α) Οι μοίρες και

β) Τα ακτίνια (rad)

Η σχέση των μοιρών και των ακτινίων δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180},$$

όπου μ το μέτρο της γωνίας σε μοίρες και α σε ακτίνια.

Για παράδειγμα, μία γωνία 60^0 , μέσω της παραπάνω σχέσης, έχει μέτρο $\frac{\pi}{3}$ σε ακτίνια.

Το ημίτονο της γωνίας ω ορίζεται ως η τεταγμένη του σημείου Μ και το συνημίτονο της ω ορίζεται ως η τετμημένη του Μ.

Παρατηρήσεις

α) Ισχύει ότι: $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$

β) $\eta\mu\left(360^0\kappa+\omega\right)=\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\left(360^0\kappa+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega,\ \ \kappa \in \mathbb{Z}$

(Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι όλες οι γωνίες που έχουν τελική πλευρά την ΟΜ έχουν το ίδιο ημίτονο και το ίδιο συνημίτονο Το κ εκφράζει τον αριθμό των ακεραίων περιστροφών της γωνίας ω).

Για να ορίσουμε την εφαπτομένη και την συνεφαπτομένη της γωνίας ω**,** φέρουμε τις εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία Α και Β του τριγωνομετρικού κύκλου. Η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο Α ονομάζεται άξονας των εφαπτομένων και η εφαπτομένη ευθεία στο Β άξονας των συνεφαπτομένων.

Τότε:

Εφαπτομένη της γωνίας ω ορίζεται ως η αλγεβρική τιμή του ΑΣ, ενώ η συνεφαπτομένη της ω ορίζεται ως η αλγεβρική τιμή του ΒΤ.

3.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρεθούν πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο τα σημεία που ορίζονται από την τελική πλευρά των γωνιών:

α) $\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ β) $\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$

2. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu 1440^0$ β) $\sigma\upsilon\nu 750^0$ γ) $\varepsilon\phi 3645^0$

δ) $\sigma\phi\frac{25\pi}{3}$ ε) $\sigma\upsilon\nu\left(-2340^0\right)$ στ) $\eta\mu\frac{49\pi}{4}$

ζ) $\varepsilon\phi\left(-\frac{59\pi}{6}\right)$ η) $\sigma\phi 4020^0$

3. Αν $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $\varepsilon\phi\omega-2\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega$ β) $\frac{\eta\mu\omega-\varepsilon\phi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\phi\omega}$

4. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $-\frac{\sigma\upsilon\nu 1200^0}{\varepsilon\phi 780^0}$ β) $\frac{\eta\mu 4000^0\cdot\varepsilon\phi 200^0}{\sigma\upsilon\nu 5000^0}$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $3\eta\mu\frac{\pi}{2}-4\left(2\sigma\upsilon\nu\pi-5\varepsilon\phi\pi\right)+\frac{2-\varepsilon\phi 2\pi}{2\eta\mu\frac{3\pi}{2}}$

β) $\sigma\upsilon\nu^2 0+\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{6}+\eta\mu^2\frac{\pi}{4}+\varepsilon\phi^2\frac{\pi}{3}+\sigma\phi^2\frac{\pi}{2}$

γ) $\eta\mu 1350^0+3\sigma\upsilon\nu 1110^0-\eta\mu 810^0$

3.3.2. Μεθοδολογία ασκήσεων

Εφαρμογή:

Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu\left(-30^0\right)$, β) $\sigma\upsilon\nu 120^0$, γ) $\varepsilon\phi\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$, δ) $\eta\mu 225^0$, ε) $\eta\mu\frac{5\pi}{6}$

στ) $\varepsilon\phi\frac{7\pi}{6}$ ζ) $\sigma\phi\frac{3\pi}{4}$ η) $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Υπάρχουν και οι περιπτώσεις των γωνιών με διαφορά $\frac{\pi}{2}$ $\left(\omega,\frac{\pi}{2}+\omega\right)$, των γωνιών με άθροισμα $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\omega,\frac{3\pi}{2}-\omega\right)$, με διαφορά $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\omega,\frac{3\pi}{2}+\omega\right)$ και με άθροισμα 2π $\left(\omega,2\pi-\omega\right)$.

Ένας μνημονικός κανόνας για να θυμόμαστε εύκολα όλες τις περιπτώσεις είναι ο εξής:

Όταν στην παρένθεση έχουμε πράξη με το π ή το 2π, τότε κανένας τριγωνομετρικός αριθμός δεν αλλάζει κατά τη μετατροπή, ενώ όταν έχουμε πράξη με το $\frac{\pi}{2}$ ή το $\frac{3\pi}{2}$, τότε το ημίτονο μετατρέπεται σε συνημίτονο, το συνημίτονο σε ημίτονο, η εφαπτομένη σε συνεφαπτομένη και η συνεφαπτομένη σε εφαπτομένη.

Το πρόσημο βρίσκεται με τον κανόνα του Ο Η Ε Σ, θεωρώντας πάντοτε ότι η γωνία ω είναι οξεία.

Για παράδειγμα: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\eta\mu\omega$, γιατί η γωνία $\frac{\pi}{2}+\omega$ θεωρούμε ότι βρίσκεται στο $2^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο, όπου τα συνημίτονα είναι αρνητικά.

Επίσης, $\varepsilon\phi\left(2\pi-\omega\right)=-\varepsilon\phi\omega$, γιατί η γωνία $2\pi-\omega$ βρίσκεται στο $4^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο όπου οι εφαπτομένες είναι αρνητικές.

2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

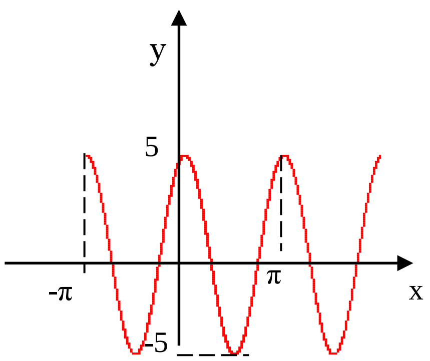
α) $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\frac{1}{4}\eta\mu x$, $h(x)=-4\eta\mu x$

β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$, $h(x)=-2\sigma\upsilon\nu x$

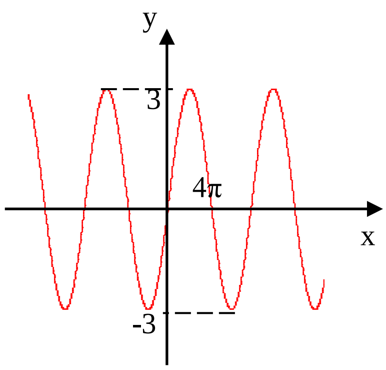
γ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=3+\sigma\upsilon\nu x$, $h(x)=\sigma\upsilon\nu 3x$

3. Στα σχήματα (1) και (2) δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως . Να βρείτε τους τύπους των f και g αν είναι γνωστό ότι έχουν τη μορφή ρημ(ωχ) ή ρσυν(ωχ) με ρ,ω ≠ 0.

ΣΧΗΜΑ (1)



ΣΧΗΜΑ (2)



4. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\eta\mu\frac{x}{4}$ β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ γ) $f(x)=2\eta\mu 3x-1$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu(\beta x)$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$ και $\beta\in\mathbb{R}^*$.

α) Αν η περίοδος της f είναι Τ = 2π, να δείξετε ότι $\beta=1$.

β) Να βρεθεί το α, αν η μέγιστη τιμή της f είναι 2.

Κεφάλαιο 4

Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις

4.1. Πολυώνυμα

4.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Βασικές έννοιες

Ορισμός: Κάθε αλγεβρική παράσταση της μορφής αx^{ν}, με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$, ονομάζεται **μονώνυμο του x νιοστού βαθμού.**

Ο αριθμός α ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου και το x^{ν} **κύριο μέρος** του.

Ορισμός: Κάθε αλγεβρική παράσταση της μορφής:

$$P(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$$

όπου $\alpha_{\nu},\alpha_{\nu-1},...,\alpha_1,\alpha_0 \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$, ονομάζεται **πολυώνυμο του x νιοστού βαθμού.**

Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu},\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1},...,\alpha_1 x,\alpha_0$ ονομάζονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_{\nu},\alpha_{\nu-1},...,\alpha_1,\alpha_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζονται **συντελεστές**.

Ειδικά, ο όρος α_0 ονομάζεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

Κάθε σταθερός αριθμός θεωρείται πολυώνυμο και ονομάζεται **σταθερό πολυώνυμο.**

Τα σταθερά πολυώνυμα είναι **μηδενικού βαθμού.**

Όταν $\alpha_{\nu}=\alpha_{\nu-1}=...=\alpha_1=\alpha_0=0$, τότε το πολυώνυμο ονομάζεται **μηδενικό.**

Το μηδενικό πολυώνυμο <u>δεν έχει βαθμό.</u>

Ορισμός: Δύο πολυώνυμα ονομάζονται ίσα, όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των αντιστοίχων όρων είναι ίσοι.

Ορισμός: Έστω πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και αριθμός $\rho\in\mathbb{R}$. **Αριθμητική τιμή** του $P(x)$ για $x=\rho$, ονομάζεται ο αριθμός:

$$P(\rho)=\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+...+\alpha_1\rho+\alpha_0$$

Ειδικά, όταν $P(\rho)=0$, τότε το ρ ονομάζεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

4.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=(\kappa-1)x^3-3x-\mu$ και $Q(x)=(\lambda-\mu)x+\mu-1$ να είναι ίσα.

2. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=\alpha x^2+(\gamma-1)x+1$ και $Q(x)=(\alpha-\beta+\gamma)x^3+(2-\beta)x^2+(\alpha-\gamma)x+1$ να είναι ίσα.

3. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού, τέτοιο ώστε: $P(x+1)-P(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P(0)=0$.

4. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο:

$P(x)=(2\alpha+1)x^2+(3\beta-1)x+2\gamma+\beta-\alpha$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

5. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^3+(\lambda^3-\lambda)x+\lambda-1$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ, το $P(x)$ είναι:

4.4. Εξισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

4.4.1. Στοιχεία θεωρίας

Σ' αυτή τη κατηγορία ανήκουν εξισώσεις, οι οποίες με τις απαραίτητες πράξεις ή τους κατάλληλους μετασχηματισμούς μετατρέπονται σε πολυωνυμικές.
Μια τέτοια περίπτωση είναι οι **άρρητες** εξισώσεις, δηλαδή εξισώσεις με ριζικά.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+8}=1+\sqrt{x+5}$.

Κατ' αρχήν πρέπει να θέσουμε τους κατάλληλους περιορισμούς:

$$2x+8\geq 0 \quad \text{και} \quad x+5\geq 0$$

$$\text{Δηλαδή} \quad x\geq -4 \quad \text{και} \quad x\geq -5$$

Συναληθεύουμε και έχουμε: $x\geq -4$ (1)

Ακολούθως, υψώνουμε στο τετράγωνο:

$$\left(\sqrt{2x+8}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$2x+8=1+2\sqrt{x+5}+x+5 \Leftrightarrow x+2=2\sqrt{x+5}$$

Σ' αυτό το σημείο και πριν συνεχίσουμε, οφείλουμε να προσέξουμε ότι πρέπει να ισχύει $x+2\geq 0$, δηλ. $x\geq -2$ (2) (γιατί κάθε ρίζα είναι μη αρνητικός αριθμός).
Συναληθεύουμε τους περιορισμούς (1) και (2) και έχουμε: $x\geq -2$.

Τώρα, υψώνουμε πάλι στο τετράγωνο:

$$(x+2)^2=\left(2\sqrt{x+5}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+4x+4=4(x+5)\Leftrightarrow x^2=16$$

$$x=4 \ \text{(δεκτή) ή} \ x=-4 \ \text{(απορρίπτεται)}$$

4.4.2. Άλυτες ακήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{2x-1}{x-3}+\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{3x-6}{x^2-5x+6}$

β) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)=12$

γ) $\left(x^2-3x+1\right)^2-10\left(x^2-3x-3\right)-51=0$

δ) $x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=80$

ε) $\left(x^2-2x\right)^3-3x^2+6x=2$

στ) $2x^4+3x^3+10x^2+3x+2=0$

ζ) $2x^4+3x^3-19x^2+6x+8=0$

η) $2\eta\mu^3x+2\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x-3\eta\mu x=0$

2. Ομοίως:

α) $\sqrt{2x+2}+3=x$

β) $1+\sqrt{x}=\sqrt{3\left(x-1\right)}$

γ) $\sqrt{7+3\sqrt{x}}=\sqrt{3x-11}$

δ) $\sqrt{x^2-x-2}=2-x$

ε) $\sqrt{9\mathrm{x}-2}=3\mathrm{x}-2$

στ) $\sqrt{\mathrm{x}+1}+\sqrt{\mathrm{x}-19}=10$

ζ) $\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-3}=\sqrt{x+42}$

η) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+5}$

θ) $\sqrt{5\left(x+2\right)}-\sqrt{x-10}=\sqrt{x+6}$

ι) $\sqrt{x+4}=\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+1}$

ια) $\sqrt{x^2+3x+1}=\dfrac{2}{x^2+3x+2}$

ιβ) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}=\dfrac{x^2-5x+9}{\sqrt{x^2-3x}}$

ιγ) $\sqrt[3]{\dfrac{2x+3}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2x+3}}=2$

ιδ) $\sqrt[4]{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}=2x^2-2$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+5x+4\right)\geq 0$

β) $x\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-4\right)<0$

γ) $\dfrac{x^2-6x+5}{x+2}\geq 0$

δ) $\dfrac{\left(x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)}{x^2-4}\geq 0$

ε) $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-5x+4}\leq 0$

στ) $\dfrac{x\left(x^2-5x+6\right)}{\left(1-x\right)\left(-x^2-x+6\right)}\leq 0$

Κεφάλαιο 5

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

5.1. Εκθετική συνάρτηση

5.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Εκθετική συνάρτηση με βάση $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

- Αν το x ανήκει στο σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, δηλαδή είναι της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*$, τότε:

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$$

- Αν $\alpha = 1$, τότε η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή είναι σταθερή συνάρτηση.

Μελέτη της εκθετικής συνάρτησης

1^{η} περίπτωση: Αν $\alpha > 1$

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$, γιατί $\alpha^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

5.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3-2\alpha}{\alpha-3}\right)^{x}$. Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε:

α) Να ορίζεται η f.

β) Να είναι η f γνησίως φθίνουσα.

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

β) $g(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{x}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{3^{x}}\cdot 5^{\frac{x}{2}}=225$

β) $0,5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$

γ) $2^{x+3}-2^{x+2}+2^{x+1}=48$

δ) $2\cdot 9^{x}-3^{x+1}-135=0$

ε) $5^{2x-1}+3\cdot 5^{x+1}-80=0$

στ) $3\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=5$

ζ) $5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$

η) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

θ) $2\cdot 5^{x-2}-3\cdot 2^{x-3}=12\cdot 5^{x-3}-2^{x}$

ι) $2\cdot 4^{x}+3\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-4}$

β) $2^{-x^2+2x}>\frac{1}{8}$

γ) $3^{2x}+3\leq 28\cdot 3^{x-1}$

δ) $\left(2^{x}-1\right)^{2}+2\left(2^{x+1}-2\right)\leq 5$

ε) $4^{\sqrt{2-x}}-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2-x}}\leq 0$

ε) $e^{-x}+e^{x}-e\geq\frac{1}{e}$

5.3. Λογαριθμική συνάρτηση

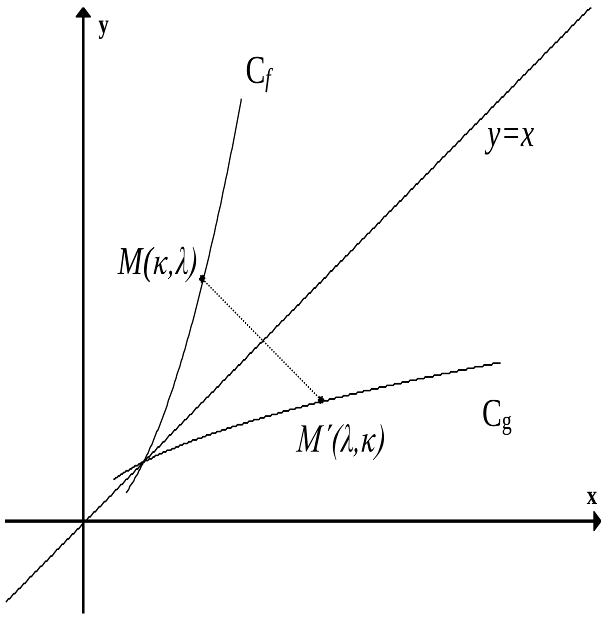
5.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Λογαριθμική συνάρτηση με βάση $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \log_\alpha x$, όπου $x > 0$.

Παρατήρηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \log_\alpha x$ και $g(x) = \alpha^x$. Παρατηρούμε ότι, αν το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε ισχύει $\log_\alpha \kappa = \lambda$, δηλαδή $\alpha^\lambda = \kappa$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο $M'(\lambda, \kappa)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της g. Γνωρίζουμε, όμως ότι τα σημεία $M(\kappa, \lambda)$ και $M'(\lambda, \kappa)$ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο $y = x$ του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου του συστήματος των αξόνων. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι γραφικές παραστάσεις μιας εκθετικής και μιας λογαριθμικής συνάρτησης με την ίδια βάση είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Γενικότερα, δύο συναρτήσεις f, g που έχουν την ιδιότητα, όταν ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε και το $M'(\lambda, \kappa)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της g, είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$.

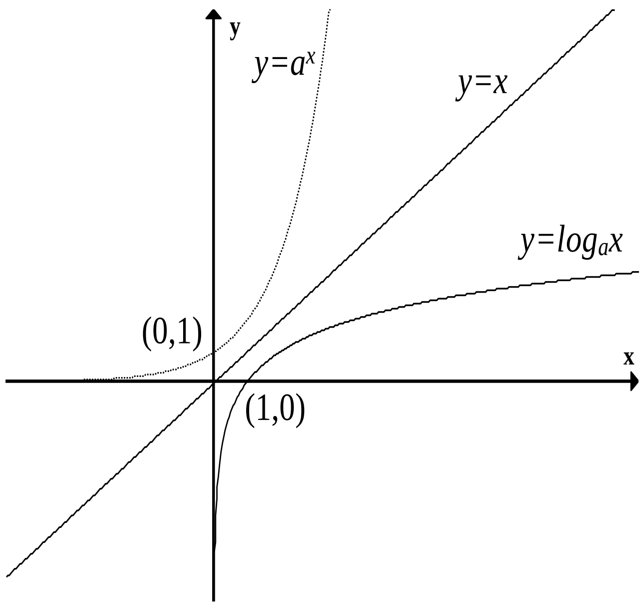


Μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης

1η περίπτωση: Αν $\alpha > 1$, τότε

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$.
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα,** δηλαδή αν $x_1 < x_2$, τότε $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$, με $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$.
- Ο άξονας $y'y$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



2η περίπτωση: Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

- Το πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$.
- Το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα,** δηλαδή αν $x_1 < x_2$, τότε $\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$, με $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$.
- Ο άξονας $y'y$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Κεφάλαιο 6

Πρόοδοι

6.1. Ακολουθίες

6.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Ακολουθία ονομάζεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους θετικούς ακεραίους, δηλαδή το $\mathbb{N}^*$.

Μία ακολουθία συμβολίζεται, συνήθως, με το συμβολισμό α_ν, που ονομάζεται **γενικός όρος** της ακολουθίας.

Θέτοντας, στον τύπο α_ν, όπου ν τις τιμές 1, 2, 3, … τότε προκύπτουν, αντιστοίχως οι **όροι** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ της ακολουθίας.

Παράδειγμα: Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}$. Να βρεθούν οι τρείς πρώτοι όροι της ακολουθίας.

Για $\nu = 1$: $\alpha_1 = \frac{(-1)^1}{1^2} = -1$

Για $\nu = 2$: $\alpha_2 = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4}$

Για $\nu = 3$: $\alpha_3 = \frac{(-1)^3}{3^2} = -\frac{1}{9}$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right) = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + \left(\nu - 1\right)\omega\right]}$$

6.2.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 7, 15, 23, …. Να βρεθεί ο γενικός όρος της προόδου.

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι: $\alpha_8 = 49$ και $\alpha_{23} = 109$.

α) Να βρείτε τον γενικό όρο της και τον α_{19}.

β) Ποιος όρος της ισούται με 141;

3. Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύουν: $\alpha_5 + \alpha_8 = 18$ και $\dfrac{\alpha_6}{\alpha_3} = 4$. Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

4. Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, για την οποία ισχύουν $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 = -3$ και $\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 = 0$.

5. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δειχθεί ότι και οι αριθμοί $\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \alpha\gamma, \gamma^2 - \alpha\beta$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

6. Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι και οι αριθμοί $\dfrac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}, \dfrac{1}{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\alpha}}, \dfrac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

6.3. Γεωμετρική πρόοδος

6.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται μία ακολουθία α_ν , όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda}$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται **λόγος** της προόδου.

Γενικός όρος γεωμετρικής προόδου

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}}$$

Παράδειγμα: Η ακολουθία 1, 2, 4, 8, 16,…. είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$.

Ο γενικός όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$.

Γεωμετρικός μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν, ισχύει :

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma}$$

Ο αριθμός $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$ ονομάζεται **γεωμετρικός μέσος** των α, γ .

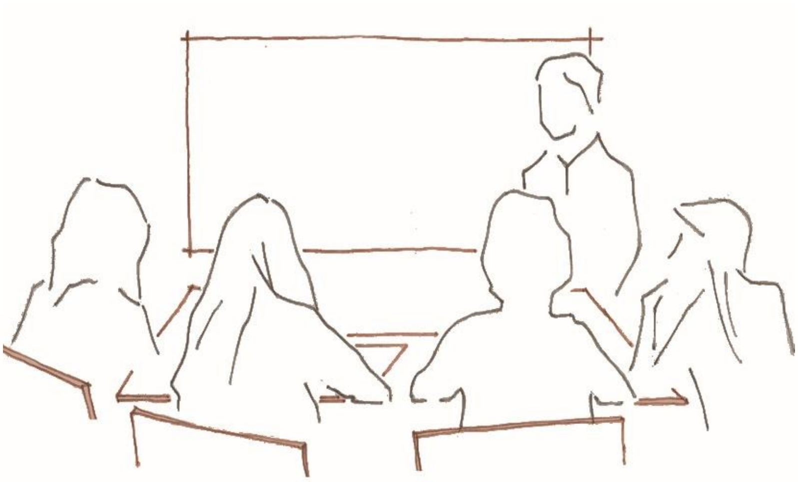
Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

$$\boxed{S_\nu = \frac{\alpha_1\left(\lambda^\nu - 1\right)}{\lambda - 1}, \quad \lambda \neq 1}$$

Αν $\lambda = 1$, τότε $S_\nu = \nu\alpha_1$

Βιβλιογραφία

1. Α. Μπάρλας, Αλγεβρα Β΄ Λυκείου, 2014, Ελληνοεκδοτική.
2. Β. Γατσινάρης, Άλγεβρα Β γενικού λυκείου, 2013, Εκδόσεις Πατάκη.
3. Β. Παπαδάκης, Άλγεβρα β΄Λυκειου , 2011, Εκδόσεις Σαββάλας.
4. Γ.Κ. Μαραγούσιας, Άλγεβρα Β΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας, 2012, εκδόσεις Σαββάλας.
5. Γ. Μεϊντάνης, Μαθηματικά Β λυκείου, εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου.
6. Δ. Κυριακόπουλος, Μαθηματικά Β λυκείου, τόμος 1, 1992, εκδόσεις Πάπαδημητροπούλου.
7. Δ. Κυριακόπουλος, Μαθηματικά Β λυκείου, τόμος 2, 1992, εκδόσεις Πάπαδημητροπούλου.
8. Ε. Τόλης, Π. Μαμαλή, Σ. Μιχαήλογλου, Άλγεβρα Β΄ λυκείου, 2006, εκδοτικός οίκος Α. Α. Λιβάνη.
9. Η. Λούβης, Άλγεβρα Β΄ ενιαίου λυκείου, 2003, Εκδόσεις Μεταίχμιο.
10. Η. Κωνσταντόπουλος, Άλγεβρα β΄Λυκειου, 2002, Εκδόσεις Γκρίτζαλης.
11. Θ. Τζουβάρας, Κ. Τζιρώνης, Άλγεβρα Β λυκείου, τόμος 1, 1999, εκδόσεις Σαββάλας.
12. Θ. Τζουβάρας, Κ. Τζιρώνης, Άλγεβρα Β λυκείου, τόμος 2, 1999, εκδόσεις Σαββάλας.
13. Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος, Άλγεβρα και Στοιχεία πιθανοτήτων Α’ Ενιαίου Λυκείου, 1991, ΟΕΔΒ.
14. Σ.Ανδρεαδάκης, Β.Κατσαργύρης, Σ.Παπασταυρίδης, Γ.Πολύζος, Α.Σβέρκος, Άλγεβρα Α’ Ενιαίου Λυκείου, 1991, ΟΕΔΒ.
15. Σ. Μέτης, Κ. Καββαδίας, Β. Ευσταθόπουλος, Άλγεβρα Β΄Λυκείου, 2002, Εκδόσεις Σαββάλας.
16. Τ. Μιχαηλίδης, Α. Σκιαδάς, Άλγεβρα Β γενικού λυκείου γενικής παιδείας, 2013,
17. Εκδόσεις Πατάκη.
18. Χ. Νάκη, Ι. Στεργίου, Χ. Στεργίου, Μεθοδική Άλγεβρα Β΄ Λυκείου,2013, εκδόσεις Σαββάλας.
19. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδος.
20. Περιοδικά Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας από 1998 – 2015.



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
Ασπασίας 76-78, Χολαργός Τηλ. 210 6512099
e-mail: stogiannis@stogiannis.edu.gr
www.stogiannis.edu.gr