Ν. ΤΣΟΥΡΜΑΣ Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
Π. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ Β. ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ
Γ. ΒΑΡΔΑΚΑΣΤΑΝΗΣ Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πρόλογος

Η Γεωμετρία, είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη χωρικών σχέσεων, δηλαδή τη σύνθεση του χώρου στον οποίο ζούμε. Οι άνθρωποι χαρακτηρίζουν τον χώρο μέσα από συγκεκριμένες θεμελιακές ιδιότητες, τα αξιώματα. Τα αξιώματα δε μπορούν να αποδειχτούν, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με μαθηματικούς ορισμούς για τα σημεία, τις ευθείες, τις καμπύλες, τις επιφάνειες και τα στερεά για την εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων.

Λόγω των άμεσων πρακτικών της εφαρμογών σε προβλήματα της καθημερινότητας, η Γεωμετρία ήταν ιστορικά ανάμεσα στους πρώτους κλάδους των μαθηματικών που αναπτύχθηκαν. Τη Γεωμετρία ανέπτυξαν εμπειρικά οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι. Μετά τις πλημμύρες του Νείλου, οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν εμπειρική γεωμετρία, για να υπολογίσουν τα όρια των χωραφιών τους. Οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν τις αρχές της τριγωνομετρίας διαιρώντας τον κύκλο και τις γωνίες σε 360 μοίρες και υπολογίζοντας τον αριθμό π.

Με τη Γεωμετρία ήρθαν σε επαφή και οι Έλληνες κυρίως με το Θαλή το Μιλήσιο, ο οποίος είναι και ο πρώτος που εισάγει την έννοια της απόδειξης ως μέσον επαλήθευσης μιας γεωμετρικής πρότασης. Ο Πυθαγόρας έθεσε την γεωμετρία σε πλήρως θεωρητικό και φιλοσοφικό επίπεδο, αλλά ολοκλήρωσε και την έννοια και την πρακτική της αποδεικτικής διαδικασίας. Με τους Έλληνες, η Γεωμετρία παίρνει πρώτη φορά την έννοια της καθαρής γνώσης και επιστήμης, μία διαδικασία που ολοκληρώθηκε με τον Ευκλείδη. Οι Έλληνες γεωμέτρες προσέγγιζαν την γεωμετρία σαν επιστήμη καθαρής γνώσης και έπρεπε να βρίσκουν αποδείξεις εφαρμοζόμενες με τον κανόνα και τον διαβήτη, σύμφωνα με τις επιταγές που καθορίστηκαν από τον Ευκλείδη περίπου το 300 π.Χ. με το έργο του "Στοιχεία", που αποτελείται από 13 τόμους. Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο η αποδεικτική θεωρητική γεωμετρία, σε αντίθεση με την εμπειρική γεωμετρία που επικρατούσε. Η γεωμετρία, λοιπόν, είναι ο πρώτος κλάδος των μαθηματικών που τοποθετήθηκε σε αξιωματική βάση από τον Ευκλείδη στα "Στοιχεία".

Στο βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Β΄ λυκείου θα παρουσιάσουμε σε βάθος την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Β’ τάξης του Γενικού

Λυκείου. Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύεται διεξοδικά η ομοιότητα τριγώνων (αναλογίες, θεώρημα Θαλή, θεώρημα διχοτόμων και κριτήρια ομοιότητας τριγώνων). Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με τις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο και στον κύκλο ενώ στο τρίτο παρουσιάζονται τα Εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων και οι εφαρμογές τους. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται τα κανονικά πολύγωνα και η μέτρηση του κύκλου.

Στο βιβλίο έχουν παρουσιαστεί με μαθηματική αυστηρότητα οι απαραίτητοι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι έννοιες που αποτελούν τον κορμό ορισμένων κεφαλαίων, αλλά συγχρόνως έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην παρουσίαση υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων. Σε κάθε κεφάλαιο έχει γίνει προσπάθεια, ώστε ο αναγνώστης να ενημερωθεί σε βάθος για τη θεωρία και τις διάφορες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να εφοδιαστεί με τόσα πολλά λυμένα παραδείγματα, ώστε να αποκτήσει μια ευχέρεια για την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει πληθώρα άλυτων ασκήσεων για την πληρέστερη εξάσκηση του μαθητή, καθώς και ενδεικτικά προτεινόμενα διαγωνίσματα προόδου.

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα της συσσωρευμένης εμπειρίας που έχει συγκεντρώσει η πολυμελής ομάδα μαθηματικών του φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης «Ε. Δ. Στογιάννη» λόγω της πολυετούς διδασκαλίας του μαθήματος. Απευθύνεται σε μαθητές της Β' λυκείου. Επί πλέον, τονίζουμε εδώ ότι το παρόν σύγγραμμα αποτελεί ένα χρήσιμο και εύχρηστο βοήθημα αναφοράς για καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται είτε στο δημόσιο, είτε στον ιδιωτικό τομέα. Από παιδαγωγικής απόψεως, εκτός της προφανούς χρησιμότητας του βιβλίου αυτού, πιστεύουμε ότι δρα και αναδρομικά ως εμπέδωση κάποιων θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων, που στο παρελθόν ίσως φαίνονταν άνευ αντικειμένου.

Οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών εντάσσονται σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, με στόχο την επέκταση και εμβάθυνσή τους. Διερευνώνται προβλήματα και αναπτύσσονται στρατηγικές επίλυσης τους με στόχο να αναπτυχθούν διάφοροι τρόποι σκέψης ώστε τα Μαθηματικά να μετατραπούν σε εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου.

Ο συγγραφεέας

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Ομοιότητα τριγώνων

1.1. Αναλογίες

1.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων (κλασμάτων), δηλ.

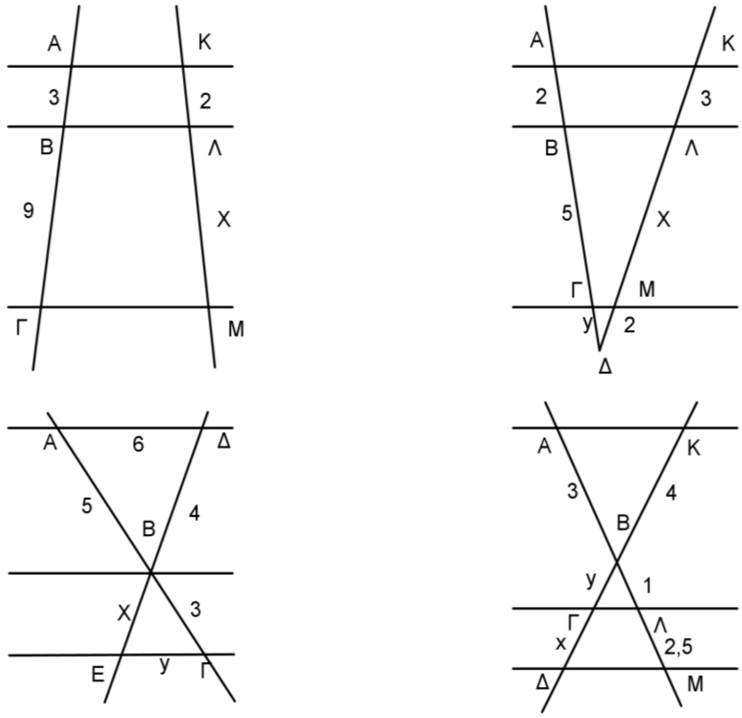
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Ιδιότητες αναλογιών

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=....=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu}$

Όταν, για τρεις αριθμούς α,β,γ ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$, δηλ. $\beta^2=\alpha\gamma$, τότε ο αριθμός β ονομάζεται **μέσος ανάλογος** των α,γ.

Εφαρμογή: Να υπολογίσετε τα x,y στα παρακάτω σχήματα:



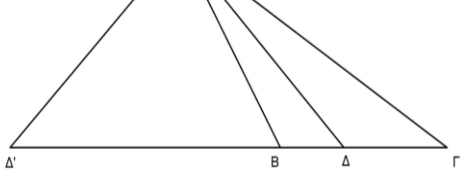
1.3. Θεωρήματα διχοτόμων

1.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με τον λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Το ίδιο ισχύει και για την εξωτερική διχοτόμο.

$$\boxed{\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma} \text{ και } \frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}}$$

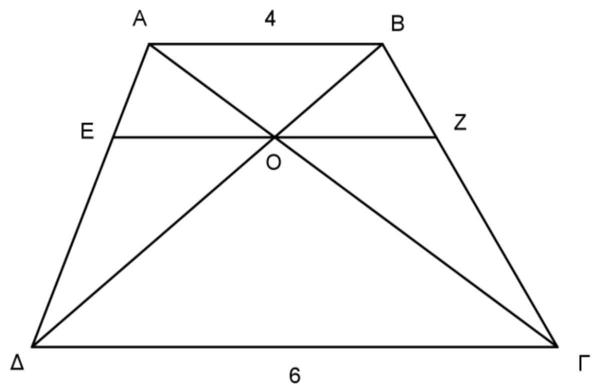


Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α=90^0$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{ΑΒ}{ΒΔ}=\frac{ΑΓ}{...}$ β) $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{...}{ΑΓ}$ γ) $\frac{ΑΒ}{...}=\frac{ΒΔ}{ΑΔ}$

2. Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ φέρουμε την παράλληλη ΕΖ στις βάσεις του, που έχουν μήκη 4 cm και 6 cm, αντίστοιχα. Αν ΑΟ = 3cm, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:



α) $\frac{ΑΟ}{ΟΓ}=\frac{ΑΒ}{...}=\frac{...}{...}$ β) $\frac{ΑΟ}{ΑΓ}=\frac{ΑΟ}{ΑΟ+...}=...$ γ) $\frac{ΕΟ}{...}=\frac{...}{ΑΓ}$

δ) ΕΟ = … cm ε) $\frac{ΟΖ}{6}=\frac{ΒΟ}{...}=\frac{...}{ΑΓ}$ στ) ΟΖ = … cm

ζ) ΕΖ = ΕΟ + … = … cm

Άλυτες ασκήσεις

1. Να δείξετε, σε κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα, ότι τα τρίγωνα που δίνονται είναι όμοια, να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών και να υπολογίστε το x σε κάθε περίπτωση:

Κεφάλαιο 2

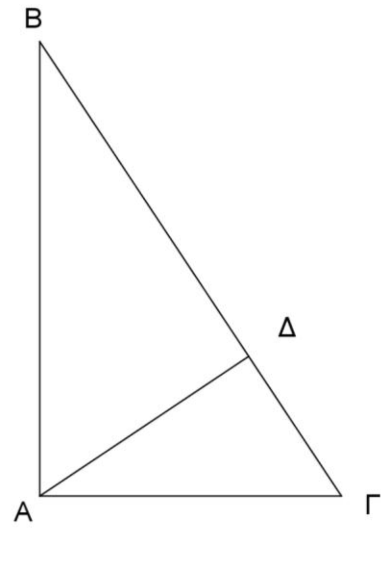
Μετρικές σχέσεις

2.1. Μετρικες σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο

2.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Θεώρημα 1^{ο}

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.



$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma\Delta}$$

Πόρισμα: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών ισούται με τον λόγο των προβολών των αντιστοίχων πλευρών στην υποτείνουσα, δηλ.

$$\boxed{\frac{AB^2}{A\Gamma^2}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}}$$

Θεώρημα 2^o **(Πυθαγόρειο)**

Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του, δηλ,

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

Θεώρημα 3^o (Αντίστροφο Πυθαγορείου Θεωρήματος)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

Θεώρημα 4^o

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα, δηλ.

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$$

2.3.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη καθέτων πλευρών 12 και 16. Να υπολογίσετε τα μήκη της υποτείνουσας, των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα, καθώς και το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{A}=90^0$, $\Gamma=30^0$ και ΑΓ = 4. Να υπολογιστούν τα μήκη των ΑΒ, ΒΓ, του ύψους ΑΔ και των τμημάτων ΔΒ, ΔΓ.

3. Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα έχουν μήκη 2 και 8. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα καθώς και τα μήκη των καθέτων πλευρών του τριγώνου.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A}=90^0$) δίνονται $\mu_\alpha=2$ και $\beta=2\sqrt{3}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες B , Γ και το ύψος υ_α .

5. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που έχει μήκος περιμέτρου 84 και μήκος υποτείνουσας 37.

6. Στην κάθετη πλευρά ΑΒ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\mathrm{A}=90^0$) θεωρούμε σημείο Δ. Να δείξετε ότι: $\mathrm{B\Gamma}^2+\mathrm{A\Delta}^2=\Gamma\Delta^2+\mathrm{AB}^2$.

7. Αν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, τότε να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεών του.

8. Έστω δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ που έχουν κοινή υποτείνουσα ΒΓ. Αν Ε, Ζ οι προβολές των Β, Γ στην ΑΔ, να δείξετε ότι: $\mathrm{AE}^2+\mathrm{AZ}^2=\Delta\mathrm{E}^2+\Delta\mathrm{Z}^2$.

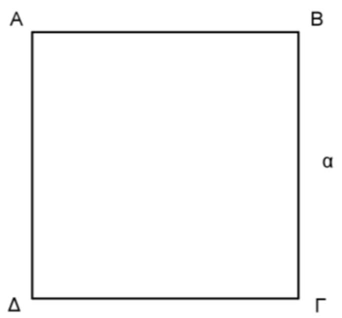
Κεφάλαιο 3

Εμβαδά

3.1. Εμβαδά γνωστών επίπεδων σχημάτων

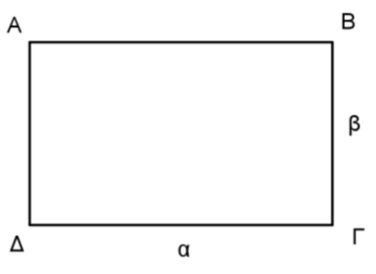
3.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ι. Τετράγωνο



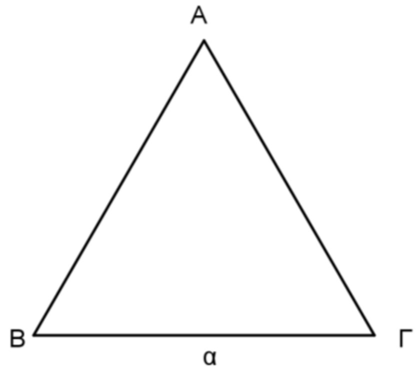
$$\boxed{E = \alpha^2}$$

ΙΙ. Ορθογώνιο



$$\boxed{E = \alpha\beta}$$

Εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α .



$$\boxed{E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}$$

3.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ || ΓΔ, ΑΒ<ΓΔ, $\mathrm{A} = \Delta = 90^0$, ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, ΒΓ = 5. Να υπολογίσετε:

α. Την προβολή της ΒΓ στην ΔΓ.

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου.

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

(Πανελλήνιες εξετάσεις 2000)

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τραπεζίου ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta)$, στις παρακάτω περιπτώσεις

α. $\mathrm{A} = \Delta = 90^0$, $\mathrm{B} = 120^0$ και ΒΓ = ΓΔ = α .

β. ΑΒ = 4, ΓΔ = 10 και ΑΔ = ΒΓ = 5.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ, όταν $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$, $\mathrm{B} = 45^0$ και $\Gamma = 30^0$.

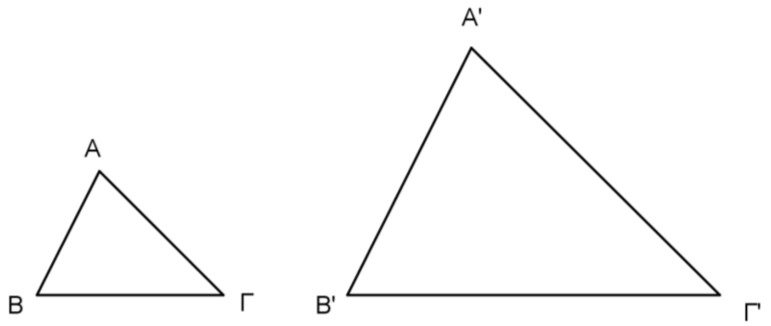
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ρόμβου ΑΒΓΔ στις εξής περιπτώσεις:

α. ΑΒ = 10 και ΑΓ = 16

Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

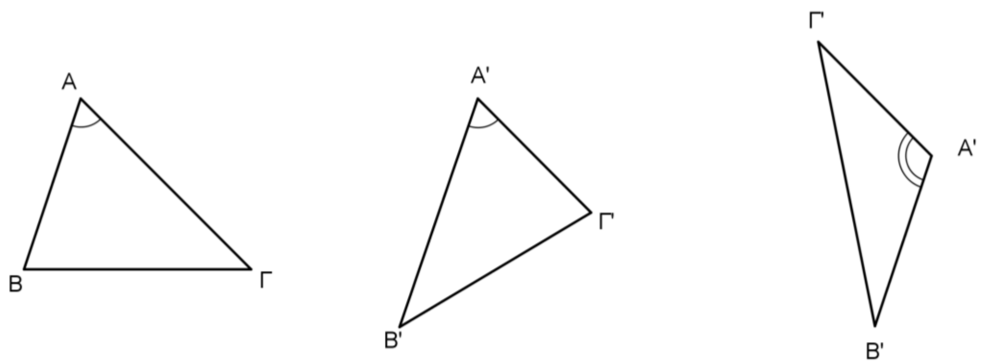
Θεώρημα Ι: Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Θεώρημα ΙΙ: Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.



δηλ. $\boxed{\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}=\lambda^2}$

Θεώρημα ΙΙΙ: Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία του ενός ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία του άλλου, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που τις περιέχουν.



δηλ. αν $\mathrm{A}=\mathrm{A}'$ ή $\mathrm{A}+\mathrm{A}'=180^0$, τότε: $\boxed{\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})}=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'\Gamma'}}}$

3.3.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Bx, τέτοια ώστε η γωνία ΓBx να είναι 30^0. Έστω ότι η Bx τέμνει τον κύκλο στο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει την Bx στο σημείο Ρ. Να δείξετε ότι:

   α. $A\Gamma = R$

   β. $\dfrac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 4$

   γ. $P\Gamma = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

(Πανελλήνιες εξετάσεις 2002)

2. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$. Να δειχθεί ότι:

   α. $(OA\Delta)^2 = (OAB)(O\Gamma\Delta)$.

   β. Αν $(OAB) = 9$ και $(O\Gamma\Delta) = 4$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου.

3. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε και Ζ, τέτοια ώστε: $A\Delta = \frac{2}{3}AB$, $BE = \frac{1}{4}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}\Gamma A$. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}$.

4. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα $B\Delta = \frac{1}{2}AB$, ΓΕ = ΒΓ και $AZ = \frac{1}{4}A\Gamma$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Ο εσωτερικό του φέρουμε κάθετες στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ και σ' αυτές παίρνουμε τμήματα ΟΚ = ΑΒ, ΟΛ = ΒΓ και ΟΜ = ΑΓ. Να δείξετε ότι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{3}(K\Lambda M)$.

Κεφάλαιο 4

Κανονικά πολύγωνα –Μέτρηση κύκλου

4.1. Κανονικά πολύγωνα

4.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Κανονικό ονομάζεται κάθε κυρτό πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες.

Γωνία κανονικού πολυγώνου

Αν ένα κανονικό πολύγωνο έχει ν πλευρές, τότε κάθε γωνία του ισούται με:

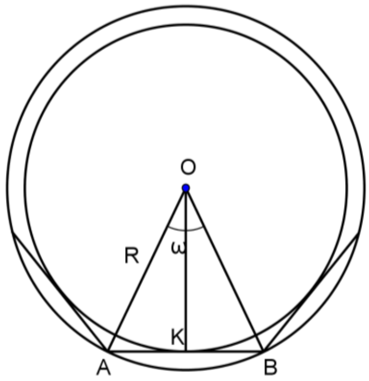
$$\boxed{\hat{\varphi}_{\nu} = 180^0 - \frac{360^0}{\nu}}$$

Παρατήρηση:

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Θεώρημα Ι: Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε το πολύγωνο που σχηματίζεται είναι κανονικό.

Θεώρημα ΙΙ: Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται και περιγράφεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους.



Στοιχεία κανονικού πολυγώνου

• Το κέντρο Κ των κύκλων ονομάζεται **κέντρο** του πολυγώνου.

• Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ονομάζεται **ακτίνα** του πολυγώνου και συμβολίζεται R.

• Η ***πλευρά*** του κανονικού πολυγώνου συμβολίζεται λ_ν.

• Η ακτίνα ΟΚ του εγγεγραμμένου κύκλου ονομάζεται **απόστημα** του πολυγώνου και συμβολίζεται α_ν.

• Η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες ονομάζεται **κεντρική** και συμβολίζεται ω_ν.

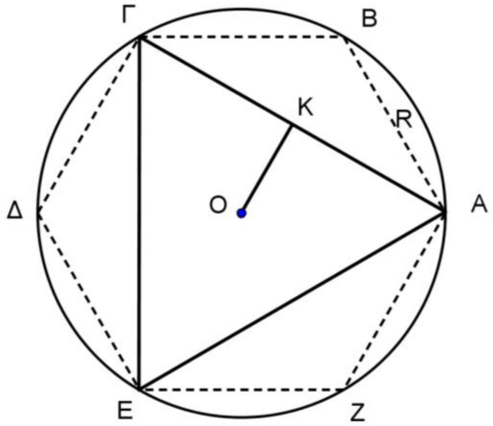
Θεώρημα ΙΙΙ: Σε κάθε κανονικό πολύγωνο ισχύουν οι σχέσεις:

- $\omega_\nu = \dfrac{360^0}{\nu}$
- $\dfrac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2$
- $P_\nu = \nu\lambda_\nu$
- $E_\nu = \dfrac{P_\nu \alpha_\nu}{2}$

Πόρισμα:

Ο λόγος ομοιότητας δύο ομοίων κανονικών πολυγώνων Π και Π΄ με ν πλευρές είναι:

$$\lambda = \frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}$$



- $\widehat{\omega}_3 = 120^0$
- $\lambda_3 = R\sqrt{3}$
- $\alpha_3 = \dfrac{R}{2}$

4.2.2. Ασκήσεις

1. Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\phi_\nu = 150^0$, να βρείτε:

α) Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

β) Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν.

γ) Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

(Πανελλήνιες εξετάσεις 2004)

2. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε τα τόξα $AB = 60^0$, $B\Gamma = 120^0$, $\Gamma\Delta = 120^0$. Αν οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Η, να βρεθούν οι πλευρές του ΑΒΓΔ και τα τμήματα ΒΗ, ΔΗ, ΓΗ.

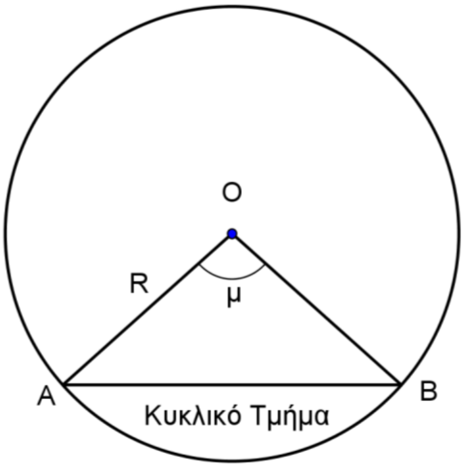
3. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $AB = 60^0$, $B\Gamma = 90^0$, $\Gamma\Delta = 120^0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

4. Να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοι κανονικού εξαγώνου, όταν τέμνονται, σχηματίζουν επίσης κανονικό εξάγωνο. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο εξαγώνων.

5. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ,ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) παίρνουμε αντιστοίχως τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΔΜ = ΑΝ = λ_3. Να δειχθεί ότι

4.3. Μήκος κύκλου – Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

4.3.1. Στοιχεία θεωρίας



- Μήκος κύκλου : $L = 2\pi \mathrm{R}$
- Μήκος τόξου : $\ell = \dfrac{\pi \mathrm{R}\mu}{180}$
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου : $E = \pi \mathrm{R}^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα : $E_{\mathrm{O}.\widehat{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\pi \mathrm{R}^2 \mu}{360}$

Παρατήρηση:

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος αφαιρούμε από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

4.3.2. Ασκήσεις

1. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7cm εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι ώστε ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3cm.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.

β) Ενας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου αυτού και ποτίζει μία κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι ώστε καμία περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση β;

δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός, έτσι ώστε καμία περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

(Πανελλήνιες εξετάσεις 1999)

Ερωτήσεις κατανόησης

I. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

1. Δίνεται κύκλος (O,R), η χορδή του AB και το απόστημα OK.

α) Αν $A\hat{O}B = 72^0$, τότε AB = λ_5. **Σ** **Λ**

β) Αν OK = $\frac{R}{2}$, τότε $A\hat{O}B = 120^0$ **Σ** **Λ**

γ) Αν AB = λ_ν και M το μέσο του κυρτογώνιου

τόξου AB, τότεQ AM = MB = $\lambda_{2\nu}$ **Σ** **Λ**

δ) Αν AB = $R\sqrt{3}$, τότε το μήκος του κυρτογώνιου

τόξου AB θα είναι $\frac{2\pi}{3}$. **Σ** **Λ**

2. Αν η πλευρά ενός κανονικού πολυγώνου

εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,3) είναι $3\sqrt{2}$,

τότε το απόστημα α_ν ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Σ** **Λ**

4.4. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Θεωρούμε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με πλευρά $\lambda_5 = \alpha$. Η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις διαγώνιες ΒΕ και ΒΔ στα σημεία Ζ και Η, αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:

α) $\mathrm{AZ} = \mathrm{H\Gamma} = \frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ β) $\mathrm{ZH} = \frac{\alpha}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$

γ) $\mathrm{A\Gamma} = \frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

2. Η διαφορά των εμβαδών ενός κανονικού εξαγώνου και ενός τετραγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σ΄έναν κύκλο (Ο,R) είναι 5,5 m^2. Να βρείτε την ακτίνα R του κύκλου.

3. Ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Κ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΚΒΓ.

γ) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοδύναμα.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του εξαγώνου.

4. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Οι διαγώνιοί του ΑΕ και ΖΓ τέμνονται στο Κ και η ΒΚ τέμνει την ΖΕ στο Λ. Να δείξετε ότι:

α) Η ΑΕ είναι κάθετη στη ΓΖ. β) $\mathrm{EK}^2 = \mathrm{KZ} \cdot \mathrm{Z\Gamma}$

γ) $\Lambda\mathrm{E} = \frac{2}{3}\mathrm{R}$ δ) $\left(\Lambda\mathrm{EK}\right) = \frac{\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{12}$

5. Εστω κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,6) με επίκεντρη γωνία ω_ν αμβλεία.

α) Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

β) Να βρείτε την πλευρά και το απόστημα του πολυγώνου.

Γενικά θέματα

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma = 2$, $\beta = 1 + \sqrt{2}$ και εμβαδόν (ΑΒΓ) = $\dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς α είναι ίσο με $\sqrt{3}$.

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΑΒ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

(Πανελλήνιες εξετάσεις 2004)

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με το τόξο ΑΓ να είναι ίσο με 120^0, $\mu_\beta = \sqrt{19}$, $\mathrm{A\Gamma} = 2\sqrt{7}$ και $(\mathrm{AB\Gamma}) = 6\sqrt{3}$.

Να υπολογιστούν:

α) Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ.

β) Τα εμβαδά του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 2\gamma$ και $\mathrm{AM} = \mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

α) Να δείξετε ότι: $\beta = \gamma\sqrt{7}$.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου.

γ) Αν ΒΔ το ύψος του τριγώνου, να δείξετε ότι ΑΔ = $\dfrac{2\gamma\sqrt{7}}{7}$.

δ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΜ και ΑΒΓ.

4. Δίνεται κύκλος (O,R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ έτσι ώστε $\mathrm{AB} = \lambda_6$ και $\mathrm{B\Gamma} = \lambda_3$.

α) Να εξηγήσετε γιατί η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

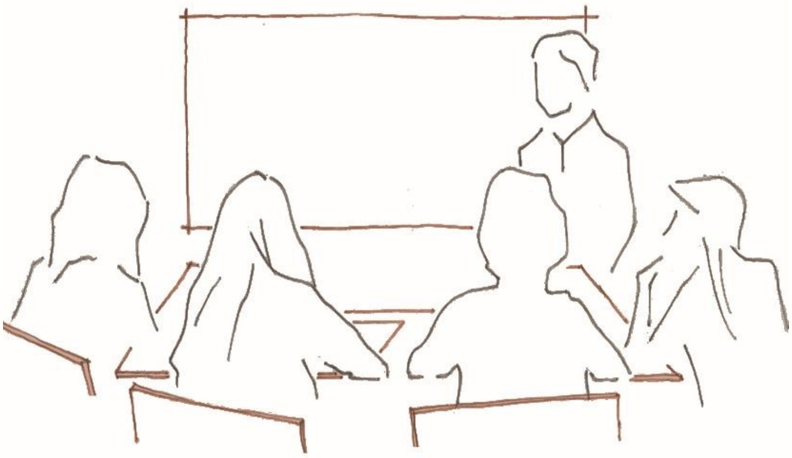
β) Να βρείτε τη περίμετρο του ΑΒΓ.

γ) Αν Μ το μέσο της ΒΓ να βρείτε το (ΑΜΓ).

δ) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

Βιβλιογραφία

1. Α. Μπάρλας, Γεωμετρία Β΄ λυκείου, 2012, Ελληνοεκδοτική.
2. Β. Βλάχος, Γεωμετρία Β΄Λυκείου, 2000, Εκδόσεις Βλάχος.
3. Β. Γατσινάρης, Κ. Χαλιάσος, Γεωμετρία Β΄ Γενικού Λυκείου γενικής παιδείας, 2013, εκδόσεις Πατάκη.
4. Β.Γ. Παπαδάκης, Γεωμετρία Β΄ λυκείου, 2011, εκδόσεις Σαββάλας.
5. Β.Γ. Παπαδάκης, Γεωμετρία Α΄ λυκείου, 2010, εκδόσεις Σαββάλας.
6. Γ.Η. Κόλιας, Γεωμετρία Β λυκείου, 1998, εκδόσεις Σαββάλας.
7. Γ. Μεϊντάνης, Μαθηματικά Β λυκείου, εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου.
8. Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σιδέρης, 2012, ΟΕΔΒ.
9. Η. Λούβης, Ευκλείδεια γεωμετρία Β΄ ενιαίου λυκείου, 2002, Μεταίχμιο.
10. Ν. Βάσιλας, Γεωμετρία Β΄ Ενιαίου Λυκείου, 2004, εκδόσεις Πατάκη.
11. Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου, Γεωμετρία Β΄ λυκείου, 2012, εκδόσεις Σαββάλας.
12. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδος.
13. Περιοδικά Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας από 1998 – 2015.



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ
Ασπασίας 76-78, Χολαργός Τηλ. 210 6512099
e-mail: stogiannis@stogiannis.edu.gr
www.stogiannis.edu.gr