

Ν. ΤΣΟΥΡΜΑΣ Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
Π. ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ Β. ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ
Γ. ΒΑΡΔΑΚΑΣΤΑΝΗΣ Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Πρόλογος

Αντικείμενο της επιστήμης των Μαθηματικών είναι η μελέτη θεμάτων σχετικών με τη δομή (τα σχήματα), την ποσότητα (τους αριθμούς), το χώρο, τη μεταβολή, τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας. Η μελέτη του χώρου και του σχήματος, που ξεκίνησε από αστρονομικές παρατηρήσεις (Βαβυλώνιοι) ή και από μετρήσεις εμβαδών (Αιγύπτιοι), θεμελιώθηκε ήδη νωρίς στη γεωμετρία του Ευκλείδη, το έργο του οποίου υπήρξε ίσως ο πρώτος μεγάλος σταθμός στην ιστορία των μαθηματικών, καθώς εισήγαγε την αξιωματική μέθοδο.

Τα πιο αρχαία μαθηματικά κείμενα που είναι διαθέσιμα είναι τα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά (πινακίδα Plimpton 322, ~1900 π.Χ.), και τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά (ο Πάπυρος Μαθηματικών Rhind, ~2000-1800 π.Χ. και ο Πάπυρος Μαθηματικών Μόσχας ~ 1890 π.Χ.). Ωστόσο, η μελέτη των Μαθηματικών ως ένα αυτοτελές πεδίο άρχισε πράγματι τον 6ο αιώνα π.Χ. με τη Σχολή των Πυθαγορείων, που πιστώνονται και τον όρο «Μαθηματικά», από την αρχαία ελληνική λέξη «μάθημα», που σημαίνει «πεδίο μάθησης». Οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί σε μεγάλο βαθμό εξευγένισαν τις μεθόδους (κυρίως μέσω της εισαγωγής της επαγωγικής λογικής και της μαθηματικής ακρίβειας στις αποδείξεις) και επέκτειναν το πεδίο της ύλης των Μαθηματικών.

Στο βιβλίο των Μαθηματικών κατεύθυνσης της Β' λυκείου θα παρουσιάσουμε την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Β' τάξης του Γενικού Λυκείου. Το βιβλίο αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Το πρώτο αποτελεί μια εισαγωγή στο Διανυσματικό Λογισμό. Τα διανύσματα έχουν ιδιαίτερη σημασία όχι μόνο για τα Μαθηματικά αλλά και για πολλές άλλες επιστήμες, αφού προσφέρουν τη δυνατότητα «μαθηματικοποίησης» μεγεθών, τα οποία δεν ορίζονται μόνο με την αριθμητική τιμή τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο, αφού δοθεί ο ορισμός της εξίσωσης μιας γραμμής, μελετώνται οι ιδιότητες της ευθείας. Στη συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο συνεχίζεται η ύλη της Αναλυτικής Γεωμετρίας με τη σπουδή των κωνικών τομών, ενώ τέλος το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί μία εισαγωγή στη Θεωρία Αριθμών.

Στο βιβλίο έχουν παρουσιαστεί με μαθηματική αυστηρότητα οι απαραίτητοι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι έννοιες που αποτελούν τον κορμό ορισμένων κεφαλαίων, αλλά συγχρόνως έχει δοθεί μεγάλη έμφαση στην παρουσίαση υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων. Σε κάθε κεφάλαιο έχει γίνει προσπάθεια, ώστε ο αναγνώστης να ενημερωθεί σε βάθος για τη θεωρία και τις διάφορες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, αλλά και να εφοδιαστεί με τόσα πολλά λυμένα παραδείγματα, ώστε να αποκτήσει μια ευχέρεια για την επίλυση των άλυτων ασκήσεων. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει πληθώρα άλυτων ασκήσεων για την πληρέστερη εξάσκηση του μαθητή, καθώς και ενδεικτικά προτεινόμενα διαγωνίσματα προόδου.

Το βιβλίο αυτό είναι αποτέλεσμα της συσσωρευμένης εμπειρίας που έχει συγκεντρώσει η πολυμελής ομάδα μαθηματικών του φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης «Ε. Δ. Στογιάννη» λόγω της πολυετούς διδασκαλίας του μαθήματος. Απευθύνεται σε μαθητές της Β' λυκείου. Επί πλέον, τονίζουμε εδώ ότι το παρόν σύγγραμμα αποτελεί ένα χρήσιμο και εύχρηστο βοήθημα αναφοράς για καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που εργάζονται είτε στο δημόσιο, είτε στον ιδιωτικό τομέα. Από παιδαγωγικής απόψεως, εκτός της προφανούς χρησιμότητας του βιβλίου αυτού, πιστεύουμε ότι δρα και αναδρομικά ως εμπέδωση κάποιων θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων, που στο παρελθόν ίσως φαίνονταν άνευ αντικειμένου.

Ο συγγραφέας

Πίνακας Περιεχομένων

Ευχαριστίες	i
Πρόλογος.....	iii
Πίνακας Περιεχομένων	v
Κεφάλαιο 1	1
Διανυσματικός λογισμός.....	1
1.1.1. Η έννοια του διανύσματος.....	1
1.1.2. Στοιχεία θεωρίας.....	1
1.2. Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων.....	4
1.2.1. Στοιχεία θεωρίας.....	4
1.2.2. Άλυτες ασκήσεις.....	7
1.3. Συντεταγμένες διανύσματος.....	12
1.3.1. Στοιχεία θεωρίας.....	12
1.3.2. Άλυτες ασκήσεις.....	15
1.4. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.....	18
1.4.1. Στοιχεία θεωρίας.....	18
1.4.2. Άλυτες ασκήσεις.....	20
1.5. Επαναληπτικές ασκήσεις.....	30
Κεφάλαιο 2	37
Η Ευθεία στο Επίπεδο	37
2.1. Εξίσωση Ευθείας.....	37
2.1.1. Στοιχεία θεωρίας.....	37
2.1.2. Άλυτες ασκήσεις.....	41
2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας.....	44
2.2.1. Στοιχεία θεωρίας.....	44
2.2.2. Άλυτες ασκήσεις.....	44
2.3. Εμβαδόν Τριγώνου	48
2.3.1. Στοιχεία θεωρίας.....	48
2.3.2. Άλυτες ασκήσεις.....	48
2.4. Επαναληπτικές ασκήσεις.....	56
Κεφάλαιο 3	63

Κωνικές Τομές	63
3.1. Ο Κύκλος.....	63
3.1.1. Στοιχεία θεωρίας.....	63
3.1.2. Άλυτες ασκήσεις.....	65
3.2. Η Παραβολή	70
3.2.1. Στοιχεία θεωρίας.....	70
3.2.2. Άλυτες ασκήσεις.....	73
3.3. Η Έλλειψη	76
3.3.1. Στοιχεία θεωρίας.....	76
3.3.2. Άλυτες ασκήσεις.....	80
3.4. Η Υπερβολή.....	85
3.4.1. Στοιχεία θεωρίας.....	85
3.4.2. Άλυτες ασκήσεις.....	90
3.5. Επαναληπτικές ασκήσεις.....	104
Κεφάλαιο 4	111
Θεωρία Αριθμών.....	111
4.1. Η Μαθηματική Επαγωγή.....	111
4.1.1. Άλυτες ασκήσεις.....	111
Γενικά θέματα	113
Βιβλιογραφία.....	125

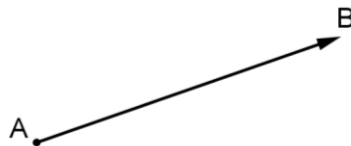
Κεφάλαιο 1

Διανυσματικός λογισμός

1.1.1. Η έννοια του διανύσματος

1.1.2. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός : Διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.



Το A ονομάζεται **αρχή** και το B **πέρας** του διανύσματος, ενώ το διάνυσμα συμβολίζεται $\overrightarrow{AB}$. Επίσης, χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα για τον συμβολισμό των διανυσμάτων, όπως $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}, \vec{v}$ κ.α.

Όταν τα άκρα του διανύσματος ταυτίζονται, τότε το διάνυσμα ονομάζεται **μηδενικό** και συμβολίζεται $\vec{0}$.

- Η ευθεία, στην οποία ανήκει ένα διάνυσμα ονομάζεται **φορέας** ή **διεύθυνση** του διανύσματος.

Όταν δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ανήκουν στον ίδιο φορέα ή σε παράλληλους φορείς ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**, και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

1.2. Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων

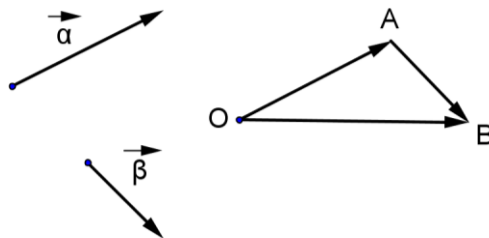
1.2.1. Στοιχεία θεωρίας

Πρόσθεση διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο. Για να προσθέσουμε τα διανύσματα εργαζόμαστε ως εξής:

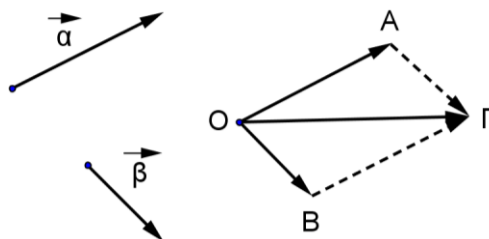
1ος τρόπος

Θεωρούμε σημείο O και τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ είναι το άθροισμα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και συμβολίζεται $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



2^{ος} τρόπος (Κανόνας του παραλληλογράμμου)

Θεωρούμε σημείο O και τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και σχεδιάζουμε το παραλληλόγραμμο $OAGB$. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{OG}$ είναι το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



Αφαίρεση διανυσμάτων

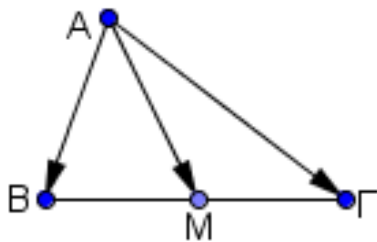
Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο. Για να αφαιρέσουμε τα διανύσματα εργαζόμαστε ως εξής:

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Θεώρημα : Δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αν και μόνο αν, υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}^*$, έτσι ώστε : $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$.

Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος

Αν M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, τότε ισχύει:



$$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AG})$$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Ένα διάνυσμα $\vec{u}$ ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ , έτσι ώστε $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$.

1.2.2. Άλυτες ασκήσεις

- Εστω M, N τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και τα διανύσματα $\vec{M\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{NE} = \vec{BA}$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Delta, NE$ και $A\Gamma$ έχουν κοινό μέσο.
- Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, E ισχύουν οι ισότητες $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$ και $\vec{EB} = \vec{\Delta A}$, να δείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΓE .

3. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα διανύσματα:

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} =$

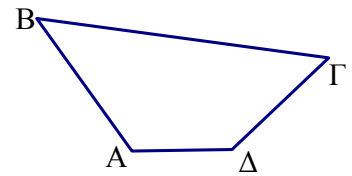
β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} =$

γ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} =$

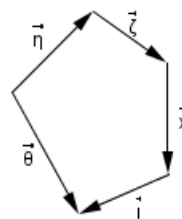
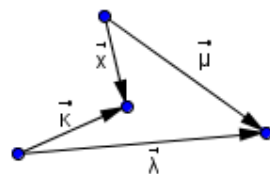
δ) $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{DG} =$

ε) $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} =$

στ) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{BA} =$



4. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων στα σχήματα που δίνονται:



5. i) Συμπληρώστε τα κενά με ένα γράμμα ώστε με βάση το παρακάτω σχήμα να αληθεύουν οι ισότητες:

α) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{B...}$

β) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A...}$

γ) $\overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{BΔ} = \overrightarrow{B...}$

δ) $\overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{Z...}$

ε) $\overrightarrow{BΔ} - \overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{B...}$

ii) Συμπληρώστε τα κενά με ένα διάνυσμα ώστε με βάση το παρακάτω να αληθεύουν οι ισότητες

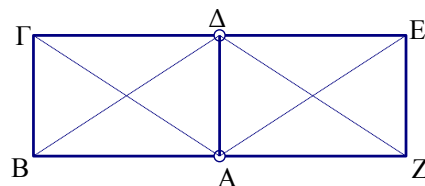
α) $\overrightarrow{ΔE} - \overrightarrow{ΔA} = \dots$

β) $\overrightarrow{AΓ} - \overrightarrow{AB} = \dots$

γ) $\overrightarrow{ΓZ} + \overrightarrow{BΔ} - \overrightarrow{ΔZ} = \dots$

δ) $\overrightarrow{BΔ} - \overrightarrow{AΔ} - \overrightarrow{ΓZ} = \dots$

ε) $\overrightarrow{ΓB} + \overrightarrow{ΔA} - \overrightarrow{ΓA} = \dots$



6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να κατασκευαστούν τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BZ}$ που ορίζονται από τις ισότητες: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AΓ} + \overrightarrow{AΔ}$, $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{BΔ}$ και ναδειχθεί ότι: $\overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{AB}$.

Κεφάλαιο 2

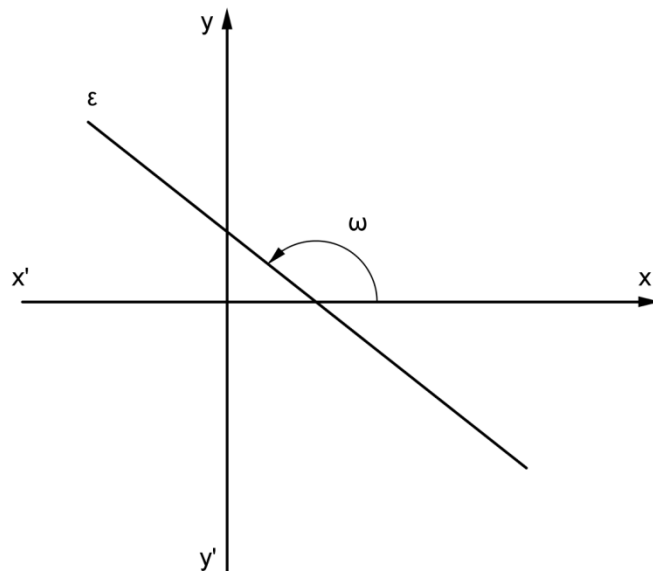
Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1. Εξίσωση Ευθείας

2.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

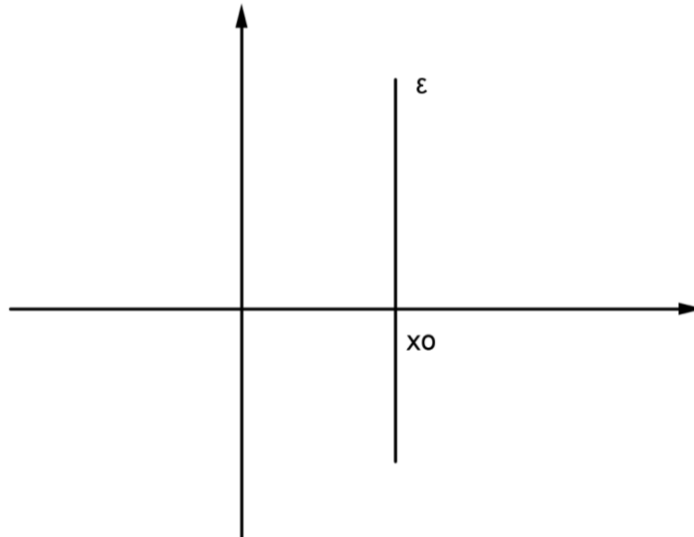
Θεωρούμε σύστημα αξόνων Oxy και ευθεία ε . Η γωνία ω που σχηματίζεται όταν ο ημιάξονας Ox στρέφεται κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε , ονομάζεται **γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x'** .



Για τη γωνία ω ισχύει: $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.

- Η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από σημείο με τετμημένη x_0 , δίνεται από τον τύπο:

$$x = x_0$$



2.1.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ και είναι:
 - α) Παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta_1} = (2011, 0)$.
 - β) Κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta_2} = (3, 0)$.
 - γ) Παράλληλη στην ευθεία $y = -2x + 3$.
 - δ) Σχηματίζει γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.
2. Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου.
 - α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OA .

2.2. Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

2.2.1. Στοιχεία θεωρίας

Θεώρημα: Κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση αυτής της μορφής παριστάνει ευθεία.

Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία

- Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
- Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

2.2.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - \mu)x + (\mu^2 - 1)y + \mu + 3 = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και πότε είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$;
2. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda^2 - \lambda - 1)x - (\lambda^2 - 3\lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda - 2) = 0$.
Να δείξετε ότι:
 - α) Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του λ .
 - β) Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση, διέρχονται από το ίδιο σημείο για κάθε τιμή του λ .
3. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και γ πραγματική σταθερά.
 - α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

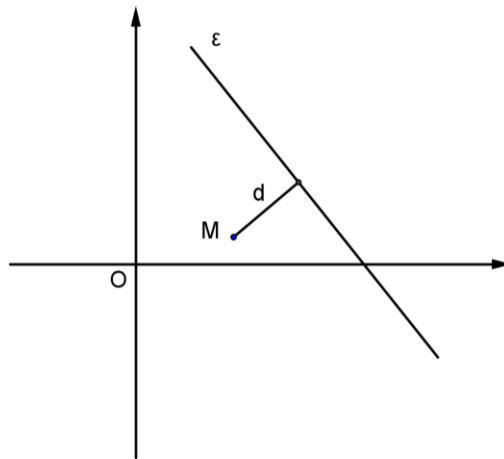
2.3. Εμβαδόν Τριγώνου

2.3.1. Στοιχεία θεωρίας

Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ και σημείο $M(x_0, y_0)$. Τότε η απόσταση του M από την ευθεία δίνεται από τον τύπο:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Εμβαδόν τριγώνου

Το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|$$

2.3.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν η απόσταση του A από το B είναι ίση με την απόσταση του A από την ευθεία ε , να βρείτε την τιμή του α .

β) Για την τιμή $\alpha = 4$, να βρείτε:

2.4. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(4,0)$. Να βρεθούν:
 - α) Η διάμεσος AM .
 - β) Το ύψος AD .
 - γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AM\Delta$.
2. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίνονται η κορυφή $\Gamma(-4,3)$, και οι εξισώσεις του ύψους BD : $3x - 2y + 2 = 0$ και της διαμέσου BM : $x - y + 2 = 0$. Να βρεθούν:
 - α) Η εξίσωση της πλευράς AG .
 - β) Οι συντεταγμένες των κορυφών A και B .
3. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(6,\kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R} - \{10\}$.
 - α) Να δείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ δεν είναι συνευθειακά.
 - β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε της διαμέσου που φέρουμε από την κορυφή B του τριγώνου είναι $x = 4$.
 - γ) Να προσδιορίσετε την κορυφή Γ , αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 8 τ.μ.
 - δ) Για $\kappa = 2$, να βρείτε την εξίσωση του ύψους η που φέρουμε από την κορυφή A , καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Δ , που τέμνονται οι ευθείες η και ε .
4. Δίνεται η εξίσωση $C: 2x + y - 5 + \lambda(x + 2y - 1) = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - α) Να δείξετε ότι η εξίσωση C παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του λ .
 - β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η C διέρχονται από σταθερό σημείο P το οποίο να βρεθεί.
 - γ) Να βρείτε το λ ώστε η αντίστοιχη ευθεία που προκύπτει από την εξίσωση C να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 7x + 11y - 2010 = 0$.
 - δ) Να βρεθεί η απόσταση του σταθερού σημείου P του β ερωτήματος από την ευθεία $\eta: 5x + 12y + 23 = 0$.
5. Δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$, $B(0,2)$ και $N(\alpha-1, \beta+2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

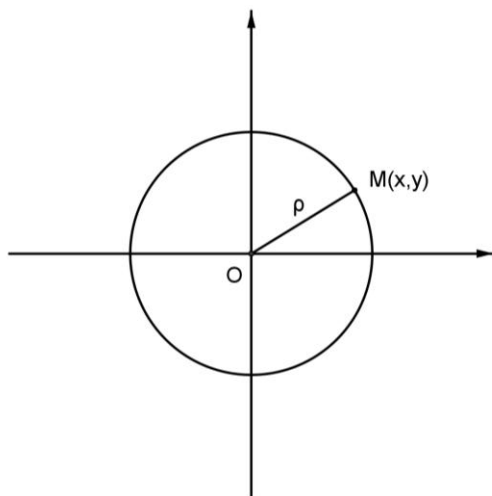
Κεφάλαιο 3

Κωνικές Τομές

3.1. Ο Κύκλος

3.1.1. Στοιχεία θεωρίας

Η εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων ορθοκανονικού συστήματος Oxy και ακτίνα $\rho > 0$ είναι:



$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Εξίσωση εφαπτομένης

Η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα ρ σε σημείο του $M(x_1, y_1)$ είναι:

Παρατήρηση:

- Όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι αδύνατη.

3.1.2. Άλυτες ασκήσεις

- Δίνονται τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $MA^2 + MB^2 = 4$, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:
 - Είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: y = x + 3$.
 - Είναι κάθετες στην ευθεία $\delta: y = 2x + 1$.
 - Διέρχονται από το σημείο $A(3,0)$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ η οποία:
 - Διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,
 - Διέρχεται από το σημείο $B(\sqrt{2}, 0)$
 - Διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0, -\sqrt{2})$,
 - Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°
 - Είναι κάθετη στην ευθεία $2x + y + 2 = 0$,
 - Διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,0)$
- Ένας κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 25 = 0$.
 - Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου.
 - Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta: 4x - 3y + 2 = 0$.

3.2. Η Παραβολή

3.2.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός: Έστω ευθεία δ και σημείο E εκτός αυτής. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ που ισαπέχουν από την ευθεία και το σημείο ονομάζεται παραβολή, δηλ.

$$d(M, \delta) = (ME)$$

Το σημείο E ονομάζεται **εστία** και η ευθεία δ **διευθετούσα** της παραβολής.

Το μέσο της απόστασης της εστίας από τη διευθετούσα είναι σημείο της παραβολής και ονομάζεται **κορυφή** της.

Για τον υπολογισμό της εξίσωσης της παραβολής, θα ασχοληθούμε με δύο περιπτώσεις:

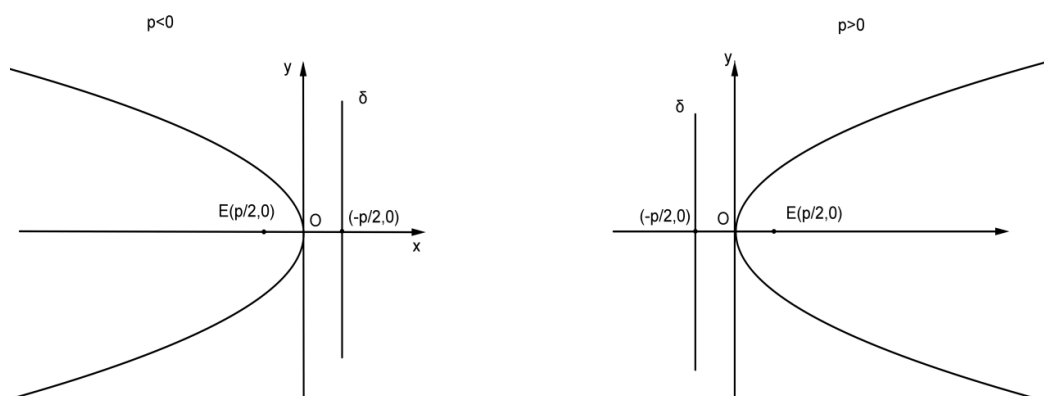
1^η περίπτωση

Η κορυφή της παραβολής είναι η αρχή των αξόνων O και η εστία βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

Θεωρούμε το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ως εστία και την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$ ως διευθετούσα,

όπου $p \in \mathbb{R}$.

Τότε η γραφική παράσταση της παραβολής είναι:



Η εξίσωση της παραβολής είναι:

$$y^2 = 2px$$

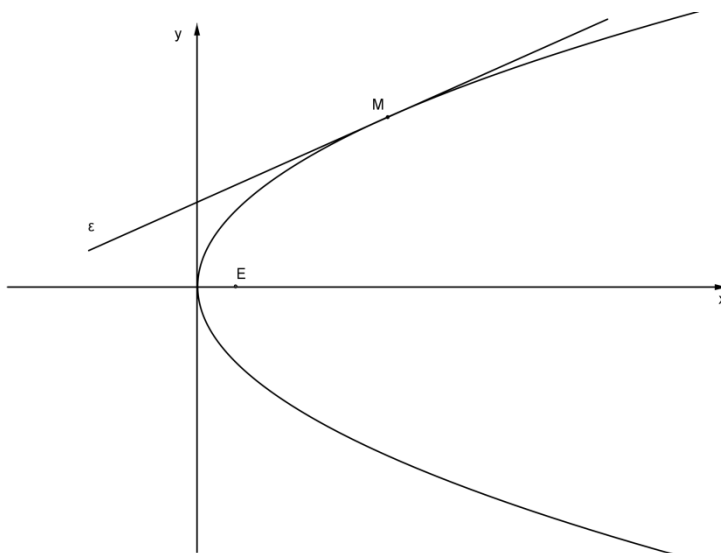
Παρατηρήσεις:

- Ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.
- Η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν ο άξονας $x'x$ και η εστία.

Εφαπτομένη παραβολής

Έστω η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ και σημείο της $M(x_1, y_1)$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο M είναι:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$



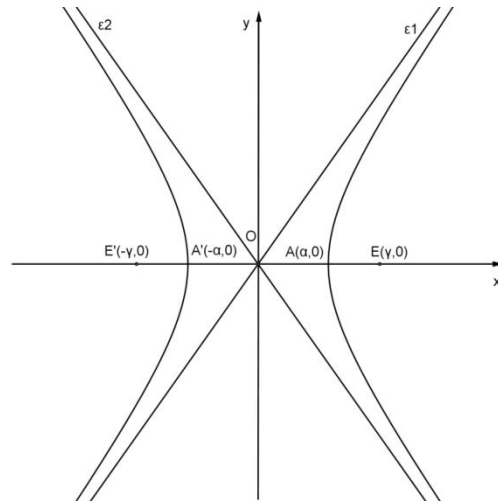
Αντιστοίχως, αν η εξίσωση της παραβολής είναι $x^2 = 2py$, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

Ασύμπτωτες υπερβολής

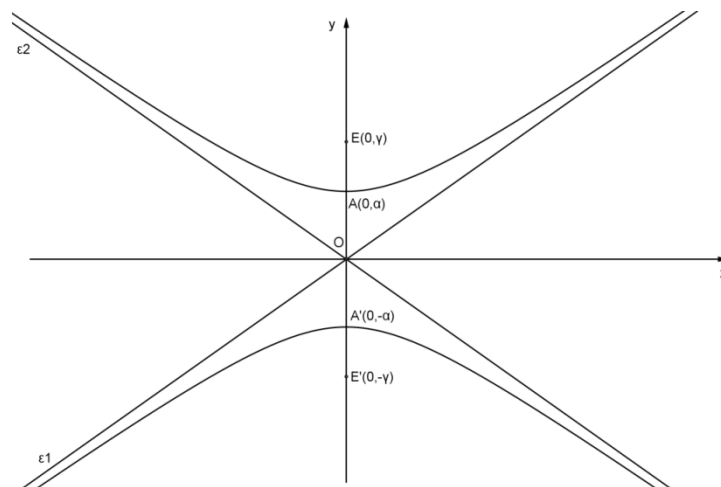
Έστω η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\beta}{\alpha} x$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{\beta}{\alpha} x$

ονομάζονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής.



Αν η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, τότε οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι

οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\alpha}{\beta} x$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{\alpha}{\beta} x$.



Ερωτήσεις κατανόησης

I. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

1. Το σημείο $(1,-1)$ ανήκει στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 2$. **Σ** **Λ**

2. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται. **Σ** **Λ**

3. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι εξίσωση κύκλου. **Σ** **Λ**

4. Ο κύκλος με κέντρο στην ευθεία $y = -x$ και ακτίνα ρ έχει πάντα εξίσωση της μορφής $C: (x - \kappa)^2 + (y + \kappa)^2 = \rho^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$. **Σ** **Λ**

5. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 3\beta y - 4\gamma = 0$ με $4\alpha^2 + 9\beta^2 + 16\gamma = 0$ παριστάνει κύκλο. **Σ** **Λ**

6. Τα σημεία $A(4,2)$ και $B(-2,2)$ είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο του κύκλου με εξίσωση $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. **Σ** **Λ**

7. Ο κύκλος $C: x^2 + (y-2)^2 = 5$ τέμνει την ευθεία $\varepsilon: 2x = y - 2$ σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία. **Σ** **Λ**

8. Ο κύκλος με εξίσωση $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$ εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$. **Σ** **Λ**

9. Η ευθεία $x = 4$ εφάπτεται του κύκλου με εξίσωση $C: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$. **Σ** **Λ**

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Αριθμών

4.1. Η Μαθηματική Επαγωγή

4.1.1. Άλυτες ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

α) $1+5+9+\dots+(4n-3)=n(2n-1)$

β) $2+5+8+\dots+(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}$

γ) $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\dots+(2n-1)2n=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

δ) $2^3+4^3+6^3+\dots+(2n)^3=2n^2(n+1)^2$

ε) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

στ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

2. Να δείξετε ότι:

α) $3^n > 3n-1$ για κάθε θετικό ακέραιο n .

β) $2^n > n+1$ για κάθε ακέραιο $n > 1$.

Γενικά θέματα

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|.$$

α) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι: $|\vec{\beta}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}|$.

γ) Αν για το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}(4\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = 4\vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2$, να δείξετε ότι $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} 2\vec{\beta} = \vec{\alpha}$ και

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\beta}.$$

α) Να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

γ) Αν $|\vec{\beta}| = 1$, να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + 2008\vec{\beta}$ και

$$|\vec{\alpha}|\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\vec{\alpha}.$$

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2A\Delta$. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, M το μέσο της $\Delta\Gamma$ και N το μέσο του AM , τότε:

α) Να εκφράσετε τα $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\Delta N}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta N} \perp \overrightarrow{AM}$.

γ) Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ να δείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{3}|\vec{\alpha}|$ και να βρείτε την $\widehat{MAB}$.

δ) Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{\beta}$.

Βιβλιογραφία

1. Α.Π. Τραγανίτης, Μαθηματικά Β λυκείου, 1998, εκδόσεις Σαββάλας.
2. Α. Μπάρλας, Μαθηματικά Β' λυκείου, 2013, Ελληνοεκδοτική.
3. Β. Σπανδάγος, Αναλυτική Γεωμετρία, τόμος 1, 1986, εκδόσεις Αίθρα.
4. Β. Σπανδάγος, Αναλυτική Γεωμετρία, τόμος 2, 1986, εκδόσεις Αίθρα.
5. Β. Γατσινάρης, Μαθηματικά Β' Γενικού Λυκείου ομάδας προσανατολισμού θετικών σπουδών, 2014, εκδόσεις Πατάκη.
6. Β.Γ. Παπαδάκης, Μαθηματικά Β' λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2010, εκδόσεις Σαββάλας.
7. Γ. Ηλιόπουλος, Α. Σπυριδάκης, Μαθηματικά β' Λυκείου, 1998, Εκδόσεις Ζήτη.
8. Ε. Τόλης, Π. Μαμαλής, Σ. Μιχαήλογλου, Μαθηματικά Β' λυκείου, 2006, εκδοτικός Οίκος Α. Α. Λιβάνη.
9. Θ. Ξένος, Μαθηματικά β' Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2004, Εκδόσεις Ζήτη.
10. Ν. Κυριακόπουλος, Μαθηματικά β' Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, 1996, Εκδόσεις Παπαδημητρώπουλου.
11. Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Μαθηματικά Β - Γ' Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, 2012, ΟΕΔΒ.
12. Σ. Βουδούρης, Γ. Κορέλης, Γ. Φέτσης, Μαθηματικά β' Λυκείου θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2002, Εκδόσεις Ορόσημο.
13. Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου, Μαθηματικά Β' λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, 2010, εκδόσεις Σαββάλας.
14. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδος.
15. Περιοδικά Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας από 1998 – 2015.



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ε. ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ

Ασπασίας 76-78, Χολαργός Τηλ. 210 6512099

e-mail: stogiannis@stogiannis.edu.gr

www.stogiannis.edu.gr